NHÓM GIẢNG VIÊN TOÁN - ĐHSP HÀ NỘI

VŨ VIỆT YÊN - TRIỆU KHUÊ

HƯỚNG DẪN ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN

TẬP V

LƯỢNG GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÓM GIẢNG VIÊN TOÁN – ĐHSP HÀ NỘI

TRIỆU KHUÊ

HƯỚNG DẪN ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN

TẬP V

LƯỢNG GIÁC

- * Ôn luyện thi đại học và cao đẳng
- * Thi tốt nghiệp Trung học phổ thông
- * Tuyển chọn học sinh khá - giỏi

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **NGUYỄN VĂN THỎA**
Tổng biên tập **NGUYỄN THIỆN GIÁP**

Biên tập:

NGỌC QUYÊN

Sửa bản in và trình bày bìa:
ĐINH QUANG HÙNG

HƯỚNG DẪN ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN
TẬP V – LƯỢNG GIÁC
Mã số: 01.11.DH 2003.
In 1.500 cuốn tại Xí nghiệp in Bắc Thái.
Giấy phép xuất bản số: 241/27/CXB. Số trích ngang: 47 KH/XB.
In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2003.

MỤC LỤC

SỐ TT	NỘI DUNG	*Trang*
Chủ đề 1	Phương trình lượng giác không chứa tham số	4
Chủ đề 2	Phương trình lượng giác có tham số	101
Chủ đề 3	Hệ phương trình lượng giác	146
Chủ đề 4	Đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác	176
Chủ đề 5	Nhận dạng tam giác	247
Chủ đề 6	Bất phương trình, hệ bất phương trình lượng giác	285
Chủ đề 7	Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác	298

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG CHỨA THAM SỐ

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý

A- Các dạng phương trình lượng giác (PTLG, ptLG) mẫu mực.

a. Dạng phương trình cơ bản.

b. Dạng phương trình bậc n đối với một hàm số lượng giác.

c. Dạng phương trình bậc nhất đối với sinu, cosu. Chú ý các kết quả:

$$|a\cos u + b\sin u| \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

$a\cos u + b\sin u = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $c^2 \le a^2 + b^2$

d. Dạng phương trình đối xứng

Chú ý khi đặt ẩn phụ $t = \sin u \pm \cos u \Rightarrow$ điều kiện của t là $|t| \le \sqrt{2}$.

e. Dạng phương trình đẳng cấp (thuần nhất)

Chú ý: trước khi chia 2 vế phương trình cho sinu hoặc cosu phải đặt điều kiện cho sinu hoặc cosu.

B - Dạng phương trình lượng giác không mẫu mực

C - Một số phương pháp thường dùng để giải PTLG

1. Biến đổi tương đương phương trình đã cho để đưa về một phương trình mẫu mực.

2. Biến đổi tương đương để đưa phương trình đã cho về phương trình gồm tổng số học các số không âm, đưa đến việc giải một hệ phương trình

$$\ldots \Leftrightarrow A^{2n} + B^{2n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

3. Biến đổi tương đương để đưa phương trình đã cho về phương trình dạng A = B thỏa mãn điều kiện:

$\begin{cases} A \le C \\ B \ge C \end{cases}$ (hằng số) thì phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases}$

4. Đặt ẩn phụ:

+ Đặt một biểu thức trong phương trình đã cho làm ẩn phụ để có một phương trình đại số dễ giải hơn. Chú ý phải đặt điều kiện cho ẩn phụ.

+ Đặt một cung trong phương trình đã cho làm ẩn phụ để dễ thấy các hàm số lượng giác quen thuộc.

5. Giải tích hoặc đoán nhận nghiệm

+ Thường dùng bảng biến thiên, định lý về tính chất hàm số liên tục để xét nghiệm phương trình.

+ Đoán nhận nghiệm phương trình và chứng minh nghiệm đó duy nhất.

II. ĐỀ BÀI

§1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Giải các phương trình sau:

Bài 1. $\sin(x^2 + 1) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

Bài 2. $\cos(x^2 + 4x - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 3. $\sin 5x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Bài 4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) = \sin(\pi\sin x)$

Bài 5. $\text{tg}(\pi\cos x) = \text{tg}(2\pi\cos x)$

Bài 6. $\text{cotg}x = \text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Bài 7. $\text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).\text{tg}\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1$

Bài 8. Tìm nghiệm âm lớn nhất của PT

$$\cos(\pi x^2) = \cos[\pi(x - 1)^2]$$

Bài 9. Giải phương trình

$$x^2 - 2x\sin y - 2\cos y + 2 = 0$$

Bài 10. Giải phương trình

$$\text{tg}5x - \text{tg}x = 0$$

Bài 11. Giải phương trình

$$1 - 32\sin^3 x\cos^3 x - \sin^6 x - \cos^6 x = \sin 6x.$$

Bài 12. Giải phương trình

$$2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG CĐ-ĐH CÁC NĂM 2000 - 2001

Bài 13. Tìm các nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$ của phương trình

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$$

(Câu II_2 - Đề 16)

Bài 14. Giải phương trình

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x.\cos^2 2x}$$

(Câu II_2 - Đề 25)

Bài 15. Giải phương trình

$$\frac{3(\cos 2x + \cot g2x)}{\cot g2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2 \qquad (1)$$

(Câu II_2 - Đề 45)

Bài 16. Giải phương trình

$$3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$$

(Câu II_2 - Đề 49)

Bài 17. Giải phương trình

$$2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$$

(Câu II_1 - Đề 68)

Bài 18. Giải phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

(Câu II_1 - Đề 77)

Bài 19. Giải phương trình

$$1 + \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

(Câu II_2 - Đề 81)

Bài 20. Giải phương trình

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3} \qquad (1)$$

(Câu II_1 - Đề 90)

Bài 21. Giải phương trình

$$(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x \quad (1)$$

(Câu II_2 - Đề 102)

Bài 22. Giải phương trình

$$|\cos x| + \sin 3x = 0$$

(Câu *III - Đề 59)*

Bài 23. Giải phương trình

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$$

(Câu I_2 - Đề 121)

Bài 24. Giải phương trình

$$\log_{7-x^2}\left(\frac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x \cos x}\right) = \log_{7-x^2} 2$$

(Câu II_2 - Đề 125)

Bài 25. Tìm các nghiệm $x \in (0, 2\pi)$ của phương trình

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos x$$

(Câu II_1 - Đề 4)

Bài 26. Giải phương trình

$$\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin\left(\frac{17\pi}{2} + 10x\right)$$

(Câu II_2 - Đề 48)

Bài 27. Tính tổng các nghiệm của phương trình

$$\cos 2x - \text{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \text{ với } x \in [1, 70]$$

(Câu II_1 - Đề 56)

Bài 28. Giải phương trình

$$\frac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \sin x} - \text{tg}^2 x.\sin x = \frac{1 + \sin x}{2} + \text{tg}^2 x$$

(Câu III_2 - Đề 62)

Bài 29. Giải phương trình

$$4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$$

(Câu III_2 - Đề 69)

Bài 30. Giải phương trình

$$3\text{tg}3x + \text{cotg}2x = 2\text{tg}x + \frac{2}{\sin 4x}$$

(Câu III_1 - Đề 71)

Bài 31: Giải phương trình

$$|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2\sin x - \cos 2x$$

(Câu III_1 - Đề 86)

Bài 32. Giải phương trình

$$\sin x + \sqrt{3}.\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$$

(Câu *II - Đề 127)*

Bài 33. Giải phương trình

$$\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$$

(Câu II_2 - Đề 52)

Bài 34. Giải phương trình

$$\text{tg}^2(2x) . \text{tg}^2(3x) . \text{tg}5x = \text{tg}^2 2x - \text{tg}^2 3x + \text{tg}5x$$

(Câu II_2 - Đề 34)

Bài 35. Tìm mọi nghiệm của phương trình

$$\sin x . \text{tg}2x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\,\text{tg}2x) = 3\sqrt{3} \quad (1)$$

thỏa mãn bất phương trình $2 + \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$ (2)

(Câu II_2 - Đề 73)

Bài 36. Giải phương trình

$$3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\text{tg}x \quad (1)$$

(Câu II_1 - Đề 143)

Bài 37. Tìm nghiệm x của phương trình

$\sin x . \cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$ thỏa mãn $|x - 1| < 3$

(Câu III_1 - ĐHSPHN-A-2000)

Bài 38. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right]=1$$

(Câu III_1-ĐHSPHN$_2$-A-2000)

Bài 39. Giải phương trình

$$2\cos^2x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = \cos4x(2\sin2x + 1)$$

(Câu III_1 - ĐHSP TPHCM-D-2000)

Bài 40. Giải phương trình

$$\operatorname{tg}x + 2\operatorname{cotg}2x = \sin2x$$

(Câu III_1-ĐHSPHN-B-2001)

Bài 41. Giải phương trình

$$\sin^2x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$$

(Câu III_1-ĐHSP kỹ thuật TPHCM-A-2001)

Bài 42. Giải phương trình

$$\sin^8x + \cos^8x = 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x) + \frac{5}{4}\cos2x$$

(Câu III_1 -ĐH Ngoại thương HN-D-2000)

Bài 43. Giải phương trình

$$1 + \sin x + \cos3x = \cos x + \sin2x + \cos2x$$

(Câu III_1 -ĐH Ngoại thương-CS$_2$-A-2000)

Bài 44. Giải phương trình

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin2x\cos^2 2x}$$

(Câu III-ĐH Kinh tế Quốc dân HN-A-2000)

Bài 45. Giải phương trình

$$\frac{3(\operatorname{tg}x+\sin x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}-2\cos x=2$$

(Câu III_1 - ĐH Tài chính Kế toán HN-2000)

Bài 46. Giải phương trình

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x)$$

(Câu II_1- ĐHBK HN-A+ D-2000)

Bài 47. Giải phương trình

$$\sin^3x+\cos^3x+\sin^3x.\operatorname{cotg}x+\cos^3x.\operatorname{tg}x=\sqrt{2\sin 2x}$$

(Câu III_1-ĐH Kiến Trúc HN-2000)

Bài 48. Giải phương trình

$$(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2x=3$$

(Câu III_1-ĐH Hàng Hải - 2000)

Bài 49. Giải phương trình

$$\sin 2x(\operatorname{cotg}x+\operatorname{tg}2x)=4\cos^2x$$

(Câu *III-ĐH Mỏ Địa chất HN-2000)*

Bài 50. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(\frac{1+3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

(Câu III_1-ĐH GTVT-CS_2-2000)

Bài 51. Giải phương trình

$$\operatorname{tg}x-3\operatorname{cotg}x=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$$

(Câu IV_1-ĐH Thủy lợi-CS_2-2000)

Bài 52. Giải phương trình

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$$

(Câu I_1-ĐH Thủy lợi HN-2001)

Bài 53. Giải phương trình

$$\cos^3x+\sin^3x=\cos 2x$$

(Câu I_1 -ĐH Y HN-2000)

Bài 54. Giải phương trình

$$3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\text{tg}x$$

(Câu III_3- HV Quân Y-2001)

Bài 55. Giải phương trình

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2$$

(Câu *II-ĐH Dược HN-2000)*

Bài 56. Giải phương trình

$$\text{tg}^2x.\text{cotg}^2 2x.\text{cotg}3x = \text{tg}^2x - \text{cotg}^2 2x + \text{cotg}3x$$

(Câu II_1-ĐH Dược và ĐH Luật HN-2001)

Bài 57. Giải phương trình

$$\sin 3x = \cos x.\cos 2x(\text{tg}^2x + \text{tg}2x)$$

(Câu II_2-ĐH QGHN + HV Ngân hàng HN-D-2001)

Bài 58. Giải phương trình

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x.\cos 2x$$

(Câu II_1-ĐH Thái Nguyên-A+B-2000)

Bài 59. Giải phương trình

$$4\sqrt{3}.\sin x.\cos x.\cos 2x = \sin 8x$$

(Câu III_3-ĐH Cần Thơ-D-2000)

Bài 60. Giải phương trình

$$\text{tg}^2x = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$$

(Câu II_C-ĐH Đà Nẵng-A-2001)

Bài 61. Giải phương trình

$$2\cos^2 2x + \cos 2x = 4\sin^2 2x.\cos^2 x$$

(Câu II_1-ĐH Công Đoàn-2000)

Bài 62. Giải phương trình

$$\sin^4.\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin x$$

(Câu *III-ĐH Công Đoàn-2001)*

Bài 63. Giải phương trình

$$\cos 3x.\cos^3 x - \sin 3x.\sin^3 x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$$

(Câu III_1-ĐH Ngoại ngữ-2001)

Bài 64. Cho $f(x) = \cos^2 x.\sin^4 x + \cos 2x$

1. Giải phương trình: $f(x) = 2\text{cox}(\sin x + \cos x) - 1$
2. Chứng minh rằng: $|f(x)| \le 1$ với $\forall x$

(Câu III-ĐH Đà Lạt-D-2000)

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC n ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Bài 65. Giải phương trình

$$3\sin^3 x - 2\sin x + \cos^3 x = 0$$

Bài 66. Giải phương trình $\sin^2 x\dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = \cos 2x$

Bài 67. Chứng minh rằng phương trình:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x.\cos 2x \qquad (1)$$

và $$\sin 3x - 3\sin x + 2\sin^2 x = 0 \qquad (2)$$

tương đương nhau

Bài 68. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{1-\cos x} - \sqrt{1+\text{cox}}}{\cos x} = 4\sin x$$

Bài 69. Giải phương trình

$$\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x$$

Bài 70. Giải phương trình

$$2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG CĐ-ĐH CÁC NĂM 2000, 2001

Bài 71. Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$$

(*Câu II_1-Đề 30*)

Bài 72. Giải phương trình

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x$$

(*Câu II_2-Đề 63*)

Bài 73. Giải phương trình

$$\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$$

(*Câu II_1-Đề 64*)

Bài 74. Tìm tổng các nghiệm x của phương trình

$$2\cos^2 x+\cot g^2 x=\frac{\sin^3 x+1}{\sin x} \text{ trên đoạn } [2;\ 40]$$

(Câu *III-Đề 140*)

Bài 75. Giải phương trình

$$\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(Câu *III-Đề 135*)

Bài 76. Giải phương trình

$$|\text{cotg}x| = \text{tg}x+\frac{1}{\sin x}$$

(*Câu I_2-Đề 46*)

Bài 77. Giải phương trình

$3\cos x + 2|\sin x| = k$ trong trường hợp $k = 2$ và $k = 3$

(*Câu III_1-Đề 57*)

Bài 78. Giải phương trình

$6\text{tg}x + a\text{cotg}3x = \text{tg}2x$ trong trường hợp $a = 0$ và $a = 5$

(*Câu II_1-Đề 97*)

Bài 79. Giải phương trình

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$$

(Câu III-Đề 112)

Bài 80. Giải phương trình

$$3\cos\frac{4x}{5} = 2\cos^2\left(\frac{3x}{5}\right) + 1$$

(Câu II2-Đề 5)

Bài 81. Giải phương trình

$$\sqrt{2}\,(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(Câu III_1-Đề 17)

Bài 82. Giải phương trình

$$6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$$

(Câu II_2-Đề 93)

Bài 83. Giải phương trình

$$\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1$$

(Câu II_2-Đề 107)

Bài 84. Giải phương trình

$$\frac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$$

(Câu II_1-Đề 47)

Bài 85. Giải phương trình

$$4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$$

(Câu III_1-ĐHSPHN-B+D-2000 và HVCTQG-A-2000)

Bài 86. Giải phương trình

$$\sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

(Câu III_1-ĐHSPTPHCM-A+B-2000)

Bài 87. Giải phương trình

$$2\text{tg}^2x + \frac{2}{\sin^2 x} + 5\text{tg}x + 5\cot gx + 4 = 0$$

(Câu III₁-CĐSPHN và ĐH Thương mại HN-2001)

Bài 88. Giải phương trình

$$\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$$

(Câu III₁-ĐHQGHN-B-2000)

Bài 89. Cho hàm số

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{5}\sin 5x$$

Tính đạo hàm f'(x) và giải phương trình f'(x) = 0

(Câu III₁-HVQHQT Hà Nội-D-2000)

Bài 90. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{1-\sin 2x} + \sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x} = 4\cos x$$

(Câu II₂-ĐH Luật Hà Nội và ĐH Xây dựng Hà Nội-2000)

Bài 91. Giải phương trình

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x + \cos x$$

(Câu III₁-ĐH An ninh - D-2000)

Bài 92. Giải phương trình

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x + 1$$

(Câu III₁-ĐH Cảnh sát nhân dân - A, B-2000)

Bài 93. Giải phương trình

$$3\cot g^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$$

(Câu III₁-HVKTQSHN-2001)

Bài 94. Giải phương trình

$$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$$

(Câu II_1-ĐH GTVT Hà Nội - 2000)

Bài 95. Giải phương trình

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

(Câu III_1-ĐH GTVT Hà Nội - 2001)

Bài 96. Giải phương trình

$$\sin 2x + 2\mathrm{tg}x = 3$$

(Câu II_2-ĐH Bách khoa Hà Nội - 2001)

Bài 97. Giải phương trình

$$48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x}(1 + \cot gx.\cot g2x) = 0$$

(Câu III_1-ĐH Mỏ Địa chất Hà Nội - 2001)

Bài 98. Giải phương trình

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + 2\sqrt{2}(1 - \sin x)$$

(Câu III_1-ĐH Hàng hải -A- 2001)

Bài 99.

Tìm các nghiệm của phương trình: $2\cos 2x - 4\cos x = 1$ thoả mãn điều kiện $\sin x \geq 0$

(Câu II_1-CĐ Công nghiệp Hà Nội - 2000)

Bài 100. Giải phương trình

$$\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}$$

(Câu IV_1-ĐH Thủy lợi Hà Nội - 2000)

Bài 101. Giải phương trình

$$3\sin x + 2|\cos x| - 2 = 0$$

(Câu III_2-ĐH Thủy sản - 2000)

LC/691

Bài 102. Giải phương trình

$$\sin 4x = \mathrm{tg}x$$

(Câu I_2-ĐH Y Hà Nội - 2000)

Bài 103. Giải phương trình

$$\sqrt{3+4\sqrt{6-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\cos x}} = 4\cos x - \sqrt{3}$$

(Câu II_2-ĐH KTQD Hà Nội - 2001)

Bài 104. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0$$

(Câu III_1-ĐH TCKT-HN- 2001)

§3. PHƯƠNG TRÌNH ACOSU + BSINU = C

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 105. Giải phương trình

$$\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$$

Bài 106. Giải phương trình

$$\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 1$$

Bài 107. Giải phương trình

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

Bài 108. Biết $f(x) = a\cos x + b\sin x = 0$

Có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 \neq k\pi,\ k \in z$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với $\forall\, x$

Bài 109. Giải phương trình

$$\sin^2 x - \sin 2x - 3\sin x - 2\cos x - 4 = 0$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI VÀO TRƯỜNG CĐ-ĐH CÁC NĂM 2000, 2001

Bài 110. Giải phương trình

$$2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$$

(Câu III_1-ĐH QGHN và HV Ngân hàng-A-2001)

Bài 111. Giải phương trình

$$4\sin^3x.\cos3x + 4\cos^3x.\sin3x + 3\sqrt{3}\cos4x = 3$$

(Câu II_2-HV Công nghệ Bưu chính - Viễn thông Hà Nội - 2001)

Bài 112. Giải phương trình

$$\sin2x + 2\cos2x = 1 + \sin x - 4\cos x$$

(Câu III_2-ĐH An ninh - D - 2001)

§4. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SINU VÀ COSU:

$$a(\cos u + \sin u) + b.\sin u\,.\,\cos u + c = 0$$

hoặc phản xứng: $a(\cos u - \sin u) + b.\sin u\cos u + c = 0$

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 113. Giải phương trình

$$1 + \sin^3x + \cos^3x = \frac{3}{2}\sin2x$$

Bài 114. Giải phương trình

$$5\cos^4x + 3\cos^3x.\sin x + 6\cos^2x.\sin^2x - \cos x.\sin^3x + \sin^4x =$$
$$= 2 + \frac{3}{2}\cos2x$$

Bài 115. Giải phương trình

$$\sin x + \sin^2x + \cos^3x = 0$$

Bài 116. Giải phương trình

$$\mathrm{tg}^2x = \frac{1+\cos^3x}{1+\sin^3x}$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG CĐ-ĐH CÁC NĂM 2000, 2001.

Bài 117. Giải phương trình

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$$

(Câu III_2-Đề 2)

Bài 118. Giải phương trình

$$\cot gx - tgx = \sin x + \cos x$$

(Câu II-Đề 92)

Bài 119. Giải phương trình

$$2(tgx - \sin x) + 3(\cot gx - \cos x) + 5 = 0$$

(Câu I_2-Đề 106)

Bài 120. Giải phương trình

$$tgx + tg^2x + tg^3x + \cot gx + \cot g^2x + \cot g^3x = 6$$

(Câu II_2-Đề 141)

Bài 121. Giải phương trình

$$2\sin x + \cot gx = 2\sin 2x + 1$$

(Câu III_1-ĐHQGHN và HV Ngân hàng -A-2000)

Bài 122. Giải phương trình

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

(Câu III_1-ĐH Ngoại ngữ Hà Nội - 2000)

Bài 123. Giải phương trình

$$2\sin 2x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$$

(Câu III_1- Phân viện Báo chí và Tuyên truyền
HV CTQG HCM - 2000)

Bài 124. Giải phương trình

$$\sin^3x + \cos^2x + \cos x = 0$$

(Câu III_1- HV Quân Y - 2000)

Bài 125. Giải phương trình:

$$2\cos 2x + \sin^2x\cos x + \cos^2x\sin x = 2(\sin x + \cos x)$$

(Câu III_1- ĐHDL Phương Đông-A- 2001)

§5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng phương pháp tổng các số không âm

Bài 126. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \,.\, \sin^2 3x$$

Bài 127. Giải phương trình

$$\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x = 3$$

2. Sử dụng phương pháp đối lập

Bài 128. Giải phương trình

$$\cos x + x^4 = 0$$

Bài 129. Giải phương trình

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x - \frac{2}{3\sin^2 x} - \frac{8\sin^4 x}{3} = 0$$

3. Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 130. Giải phương trình

$$1 = \sin^7 x . \sin 3x + \frac{1}{2}\sin^2 2x + \cos 2x$$

Bài 131. Giải phương trình

$$3\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - 3\sin x + \sqrt{3}\sin 2x + 2 = 0$$

4. Sử dụng phương pháp giải tích

Bài 132. Giải phương trình

$x + 2 - 2^{\cos 2x} = 0$ với $x \in [0, 1]$

Bài 133. Chứng minh rằng phương trình

$$1 - x + \cos x = 0$$

có nghiệm duy nhất trên $[0, 2\pi]$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG CĐ-ĐH CÁC NĂM 2000, 2001

1. Phương pháp tổng các số không âm

Bài 134. Giải phương trình

$$x^2 - 2x\sin(xy) + 1 = 0$$

(Câu III_1-Đề 60)

Bài 135. Giải phương trình

$$\cos^4x - \sin^4x = |\cos x| + |\sin x|$$

(Câu III_1-Đề 80)

Bài 136. Giải phương trình

$$\cos2x - \cos6x + 4(3\sin x - 4\sin^3x + 1) = 0$$

(Câu III_1-Đề 83)

Bài 137. Giải phương trình

$$\sin^2x + \sin^2y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}$$

(Câu II_2-Đề 105)

Bài 138. Giải phương trình

$$\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}^2y + \mathrm{cotg}^2(x + y) = 1$$

(Câu V_b-Đề 99)

Bài 139. Giải phương trình

$$4\cos^2x + 3\mathrm{tg}^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x + 4 = 0$$

(Câu III_2-Đề 32)

Bài 140. Giải phương trình

$$1 + 3\mathrm{tg}x = 2\sin2x$$

(Câu III_1-ĐHQGHN-D-2000)

Bài 141. Giải phương trình

$$8\cos4x.\cos^2(2x) + \sqrt{1 - \cos3x} + 1 = 0$$

(Câu III_2-ĐHSp Vinh-A+B+E-2000)

Bài 142. Giải phương trình

$$\cos^5 x + \sin^5 x + \cos 2x + \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$$

(Câu II_2-ĐH Nông nghiệp I-B-2000)

Bài 143. Giải phương trình

$$2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x$$

(Câu III_1-ĐH An Ninh-A-2001)

2. Phương pháp đối lập

Bài 144: Giải phương trình

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2\left(1 + \sin^2 2x\right)$$

(Câu III_1-Đề 24)

Bài 145. Giải phương trình

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,(2 - \sin 3x)$$

(Câu II_1-Đề 35)

Bài 146. Giải phương trình

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$$

(Câu II_1-Đề 74)

Bài 147. Giải phương trình

$\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$ vô nghiệm

(Câu III_2-Đề 101)

Bài 148. Giải phương trình

$$\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x}$$

(Câu II_2-Đề 109)

* Bạn đọc tham khảo thêm các bài tập khác như: II_1-Đề 91, II_1- Đề 119, III_1-Đề 130, II_2-Đề 136, II_1- Đề 150, II_1-Đề 94.

Bài 149. Giải phương trình

$$\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$$

(Câu IV_2-ĐH Huế - A+B-2000)

Bài 150. Giải phương trình

$$\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2(1+\sin^2 2x)$$

(Câu III_a-HV Ngân hàng - Phân viện TP.HCM-A-2001)

3. Phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 151. Giải phương trình

$$tg(120^0 + 3x) - tg(140^0 - x) = 2\sin(80^0 + 2x)$$

(Câu II_2-Đề 123)

Bài 152. Giải phương trình

$$tg^2x = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$$

(Câu II_2-Đề 133)

Bài 153. Giải phương trình

$$\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x} = 3 \quad (1)$$

(Câu III_1-Đề 146)

* Bạn đọc có thể tham khảo bài III_1- Đề thi vào Phân viện Báo chí - HVCTQGHCM-1998; III_1 - Đề thi vào Học viện Công nghệ BCVT-1999.

4. Phương pháp giải tích và đoán nhận nghiệm

Bài 154. Với n là số tự nhiên bất kỳ lớn hơn 2, hãy tìm

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn phương trình

$$\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}}$$

(Câu III_2-ĐHBKHN-1999)

Bài 155. Giải phương trình

$$2\log_3 cotgx = \log_2 \cos x$$

(Câu III_2-Đề 78)

III- HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ - CHỦ ĐỀ 1

Bài 1.

$$\text{Vế phải} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow \sin(x^2+1) = \dfrac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình được xác định: $\left[\begin{array}{l} x^2+1=\alpha+k2\pi \\ x^2+1=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right.$

$k \in z$, $\sin\alpha = \dfrac{n}{n+1}$

- Nếu $x^2+1=\alpha+k2\pi \quad \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\alpha-1+k2\pi}$ với

  $\alpha - 1 + k2\pi \geq 0 \quad \Leftrightarrow k \geq \dfrac{1-\alpha}{2\pi}$

- Nếu $x^2+1=\pi-\alpha+k2\pi \quad \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\pi-\alpha-1+k2\pi}$, với

  $\pi - \alpha - 1 + k2\pi \geq 0 \quad \Leftrightarrow k \geq \dfrac{\pi-\alpha-1}{2\pi}$

ĐS: Phương trình có 4 họ nghiệm

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha-1+k2\pi}$ với $k \in Z$ thỏa mãn điều kiện

$k \geq \dfrac{1-\alpha}{2\pi}$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\pi-\alpha-1+k2\pi}$ với $k \in Z$ thỏa mãn điều kiện

$k \geq \dfrac{\pi-\alpha-1}{2\pi}$

(α : tính theo radian)

Bài 2. Phương trình $\Leftrightarrow \cos(x^2 + 4x - 2) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$$

- Nếu $x^2 + 4x - 2 = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x^2 + 4x - \dfrac{8+\pi}{4} - k2\pi = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{\dfrac{24+\pi}{4} + k2\pi}$ với $\dfrac{24+\pi}{4} + k2\pi \geq 0$

$\Leftrightarrow k \geq -\left(\dfrac{24+\pi}{4}\right) \Rightarrow k = -1, 0\ldots$

- Nếu $x^2 + 4x - 2 = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x^2 + 4x - \dfrac{8-\pi}{4} - k2\pi = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{\dfrac{24-\pi}{4} + k2\pi}$ với $\dfrac{24-\pi}{4} + k2\pi \geq 0$

$\Leftrightarrow k \geq -\left(\dfrac{24-\pi}{4}\right) \Rightarrow k = 0, 1, 2\ldots$

ĐS: Phương trình có 4 họ nghiệm

- $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{\dfrac{24+\pi}{4} + k2\pi}$ với $k = -1, 0, \ldots$
- $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{\dfrac{24-\pi}{4} + k2\pi}$ với $k = 0, 1, \ldots$

Bài 3. Trước hết, chứng minh $\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ta có $\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sin 15^0 - 4\sin 15^0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sin 15^0 - 4\sin 15^0 . \frac{1-\cos 30^0}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = 6\sin - 4\sin 15^0\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sin 15^0 + 2\sqrt{3}\sin 15^0$$

$$\Leftrightarrow \sin 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} \Rightarrow \sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- Ta có $\sin 5x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin\left(-15^0\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = -15^0 + k360^0 \\ 5x = 195^0 + k360^0 \end{array}\right.$$

ĐS: $\left[\begin{array}{l} x = -3^0 + k72^0 \\ x = 39^0 + k72^0 \end{array}\right. \quad k \in Z$

* ***Chú ý***:

1) Từ $\sin 15^0 = \sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 15^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) Bằng nhận xét $\sin 36^0 = \cos 54^0 \Leftrightarrow \ldots$ ta có

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Bài 4. Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin x\right) = \sin(\pi \sin x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(1-\sin x) = \pi\sin x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2}(1-\sin x) = \pi(1-\sin x) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1-4k}{3} \\ \sin x = 1+4k \end{array}\right. \qquad k \in Z$$

- Với $\sin x = \dfrac{1-4k}{3}$ phải có $-1 \le \dfrac{1-4k}{3} \le 1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le k \le 1$

Vì $k \in Z \Rightarrow k = 0, 1$. Vậy có $\sin x = 0$; $\sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ (a)

- Với $\sin x = 1 + 4k$, phải có $-1 \le 1 + 4k \le 1$ và $k \in Z$

$\Rightarrow k = 0$ vậy có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ (b)

- (a) và (b) $\Rightarrow$ ĐS: $x = \left\{k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}, k \in Z$

Bài 5. Phương trình $\Leftrightarrow \pi\cos x = 2\pi\cos x + k\pi \Leftrightarrow \cos x = -k$

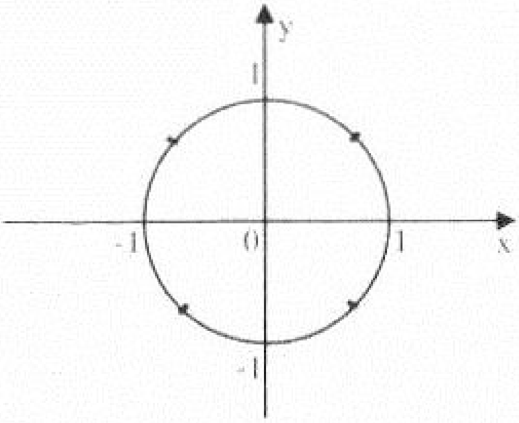
Vì $k \in Z$ và $|\cos x| \le 1 \Rightarrow$ ta có $k = \{0, \pm 1\} \Rightarrow$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (2x+1)\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right.$$

ĐS: $x = \ell\dfrac{\pi}{2} \qquad \ell \in Z$

* *Chú ý*: Quy tắc gộp nghiệm

Nếu các đầu cung nghiệm của các phương trình được biểu diễn tại các đỉnh của một đa giác đều n cạnh trên đường tròn lượng giác, thì các nghiệm đó được gộp lại thành một họ nghiệm có công thức:



$$x = \alpha + K\,\frac{2\pi}{n},\quad k\in Z$$

α là cung không âm nhỏ nhất

Bài 6. Đáp số: Vô nghiệm

Bài 7. Điều kiện phương trình:

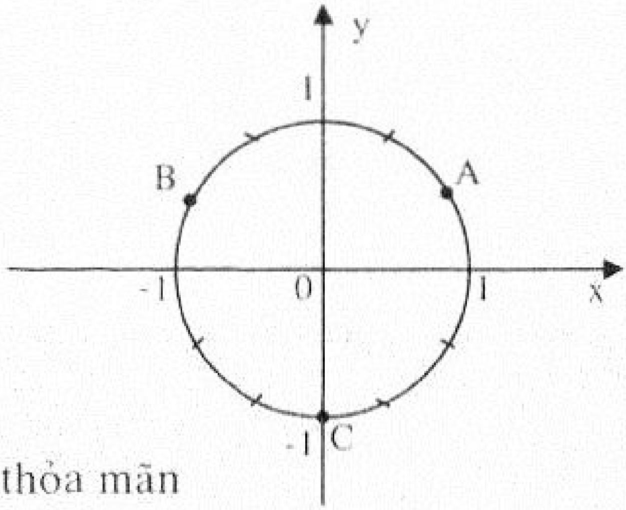
$$\cos\frac{x}{2}.\cos\left(2x\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \qquad (1)$$

Khi đó dễ thấy $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ (*) $k \in Z$

Các đầu họ cung (*) được biểu diễn tại các điểm A, B, C trên đường tròn lượng giác

Vậy ta có 3 họ cung

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{6} + \ell 2\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + \ell 2\pi \qquad \ell \in Z \\ x_3 = -\frac{\pi}{2} + \ell 2\pi \end{array}\right.$$



Thử vào điều kiện (1) đều thỏa mãn

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3},\quad k \in Z$

Bài 8. Phương trình $\Leftrightarrow\ \pi x^2 = \pm\,\pi(x - 1)^2 + k2\pi,\ k \in Z$

- Với $x^2 = (x - 1)^2 + 2k \Leftrightarrow 2x = 1 + 2k \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + K$

Ta có nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{1}{2}$ ứng với $k = -1$ (a)

- Với $x^2 = -(x - 1)^2 + 2K \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 - 2k = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4k - 1}}{2}$ với $K \geq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ với $K \in Z$, nghiệm âm lớn nhất ứng với $K = 1$. Khi đó

$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ (b)

(a) và (b) $\Rightarrow$ *ĐS*: Nghiệm âm lớn nhất là $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

Bài 9. Phương trình

$\Leftrightarrow x^2 - 2x\sin y + \sin^2 y + \cos^2 y - 2\cos y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sin y)^2 + (\cos y - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 1 \\ x = \sin y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} y = k2\pi \\ x = 0 \end{cases}$$

ĐS: $(x = 0;\ y = k2\pi),\ k \in Z$

Bài 10. Phương trình $\mathrm{tg}5x - \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}x = 0$ (1) có điều kiện là $\cos 5x\ .\ \mathrm{cox} \neq 0$ (2) khi đó

(1) $\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4}$. Kết hợp (2) có $k = 4\ell$

$\ell \in Z \Rightarrow$ *ĐS*: $x = \ell\pi,\ \ell \in Z$

Bài 11. Phương trình

$1 - 32\sin x\cos x - \sin^6 x - \cos^6 x = \sin 6x$

$\Leftrightarrow 1 - 32\sin^3 x\cos^3 x - (\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) = \sin 6x$

$\Leftrightarrow 1 - 4\sin^3 2x - \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^2 2x = 3\sin 2x \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin 2x = 4 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

Bài 12.

Phương trình $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$ (1) có điều kiện là $\left\{\begin{array}{l}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow\ x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow\ 2(\sin 3x - \cos 3x) - \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x)\right] - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)\right] -$

$- \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ -2 + 8\sin x\cos x - \frac{1}{\sin x\cos x} = 0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0\\ 2\sin^2 2x-\sin 2x-1=0\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0\\ \sin 2x=1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

ĐS: $x = \left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ -\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{7\pi}{12}+k\pi\right\}$

Bài 13. Phương trình:

$$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$$

ĐS: $x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6},\ \pi,\ 2\pi,\ \frac{17\pi}{6},\ 3\pi\right\}$

Bài 14. Phương trình:

$$\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x} = 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0 & (1)\\ 1+8\sin 2x.\cos^2 2x = 4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\ 1+4\sin 4x.\cos 2x = 2\left[1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\ 1+2(\sin 6x+\sin 2x) = 2+2\sin 6x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad (1) \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right\}, k \in Z \end{cases}$$

Với

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow (1)\text{cho} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k3\pi\right) \geq 0$$

với $k = 2\ell$, $\ell \in Z$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \Rightarrow (1)\text{cho} \sin\left(\frac{5\pi}{4} + k3\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

Với

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + k3\pi\right) \geq 0$$

với $K = 2\ell + 1$, $\ell \in Z$

Vậy *ĐS*: $x = \left\{\dfrac{\pi}{12} + \ell 2\pi, \dfrac{5\pi}{12} + (2\ell + 1)\pi\right\}$, $\ell \in Z$

Bài 15. Điều kiện phương trình:

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cot g2x \neq \cos 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x.\cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{4}$$

Khi đó phương trình đã cho:

$$\frac{3\cos 2x + \cot g2x}{\cot g2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2 \Leftrightarrow \left\{\frac{3\cos 2x(1 + \sin 2x)}{\cos 2x(1 - \sin 2x)} = \right.$$

$$= 2(1 + \sin 2x) \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

ĐS: $x = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\right\}, k \in Z$

Bài 16. Phương trình:

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

ĐS: $x = \left\{\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9};\ \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9},\right. \quad k \in Z$

Bài 17. Phương trình

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x\right) + \cos 2x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos x.\cos 2x + \cos 2x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) + \cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(1 + \cos^2 x - \cos x \sin x + \cos x - \sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left[\left(1 - \sin^2 x\right) + \cos x(1 - \sin x) + (1 - \sin x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x)(2 + \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \ \text{(Vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

ĐS: $x = \left\{\frac{\pi}{2} + K2\pi,\ \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\} \ k \in Z$

Bài 18. Phương trình:

$$\Leftrightarrow \left(2\sin^2 x\right)^2 + \left[2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + \left[1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin 2x + \cos 2x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow ĐS\text{: } x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{4} + K\pi,\ k \in Z\right\}$$

Bài 19. Phương trình

$$\Leftrightarrow 1 + \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left[\sin\frac{x}{2} - 2\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin^3\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)\left(2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \sin\frac{x}{2} = 1\end{array}\right. \Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \{K\pi,\ (4K+1)\pi\},\ K \in Z$$

Bài 20. Điều kiện phương trình:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\left\{\cos x + \frac{1}{2}\right\} \neq 0$$

Khi đó (1)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \mathit{ĐS}:\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\ k\in Z$$

Bài 21.

(1) $\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\,(2\sin 2x + 1) = 4\sin^2 x - 1$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\,(\sin 2x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}\\ x = \mp\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\quad k\in Z$$

Bài 22. Phương trình

$$|\cos x| - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \ge 0\\ \sin 3x = +\cos x\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0\\ \sin 3x = -\cos x\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \ge 0\\ x = \left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \dfrac{3\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0\\ x = \left\{\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}\end{cases}\end{array}\right.$$

Biểu diễn các đầu cung mỗi họ nghiệm trên đường tròn lượng giác và đối chiếu với điều kiện $\cos x \geq 0$, $\cos x < 0$, ta có:

$$ĐS: x = \left\{ \begin{array}{r} -\frac{\pi}{4} + \ell 2\pi, \frac{3\pi}{8} + \ell 2\pi, -\frac{\pi}{8} + \ell 2\pi; \frac{5\pi}{8} + \ell 2\pi, \frac{9\pi}{8} + \ell 2\pi, \\ \frac{5\pi}{4} + \ell 2\pi; \quad \ell \in Z \end{array} \right\}$$

Bài 23. Điều kiện $2\cos x - \sin x \neq 0$

Khi đó phương trình $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(2\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos(\cos x - 2\sin x) = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ đối chiếu điều kiện, có:

$$ĐS:\ x = \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha + k\pi \text{ với } tg\alpha = \frac{1}{2},\ \mathbf{k} \in Z \right\}$$

Bài 24.

$$\begin{cases} 0 < 7 - x^2 \neq 0 \\ \dfrac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x.\cos x} > 0 \\ \sin 2x.\cos x \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình

$\Leftrightarrow \dfrac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x \cos x} = 2 \Leftrightarrow 3\sin 2x - 2\sin x = 2\sin 2x \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = 0$

Đối chiếu điều kiện, $\Rightarrow ĐS:\ x = \pm\dfrac{\pi}{3}$

Bài 25. Điều kiện phương trình: $\forall x \in (0, 2\pi)$. Khi đó phương trình đã cho:

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x \,.\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \text{ nếu } x \in (0, \pi) \\ \cos 2x = -\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \text{ nếu } x \in (\pi, 2\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Trong $(0, 2\pi)$ ta có *ĐS*: $x = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}\right\}$

* *Chú ý:* $x = \pi$ thay vào phương trình đã cho không thoả mãn.

Bài 26. Dùng công thức hạ bậc ta có phương trình

$$\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin\left(\frac{17\pi}{2} + 10x\right)$$

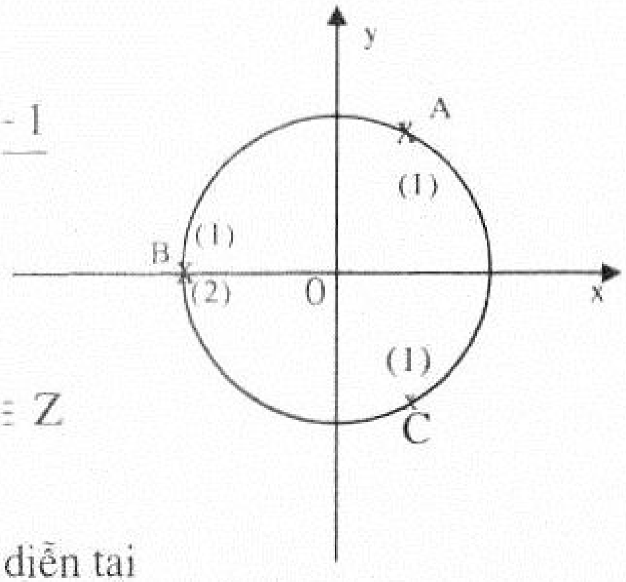
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 16x + \cos 4x) = \cos 10x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 10x = 0 \\ \cos 6x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$ĐS:\ x = \left\{\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10},\ \ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},\ k \in Z\right\}$$

Bài 27. Điều kiện phương trình

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \ \text{ sao cho } x \in [1, 70]$$

* Khi đó phương trình đã cho:



$$\cos 2x - tg^2x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - tg^2x = -\cos x - tg^2x$$

$$\Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} & (1) \\ x = -\pi + k2\pi & (2) \end{array}\right. \quad k \in Z$$

Các đầu cung nghiệm được biểu diễn tại các điểm A, B, C trên đường tròn lượng giác $\Rightarrow$ gộp nghiệm lại ta có $1 \le x \le \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{3} \le 70$

$\Rightarrow k \in [-0{,}0023;\ 32{,}7]$ mà $k \in Z \Rightarrow k = 0, 1, 2, \ldots, 32$

$\Rightarrow$ Có tổng:

$$S_{33} = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{3} + 32.\frac{2\pi}{3}\right)$$

Đó là cấp số cộng có $\left.\begin{array}{r} \text{số hạng đầu là } \dfrac{\pi}{3} \\ \text{công sai } d = \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{số các số hạng là } 33 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$S_{33} = \frac{33}{2}\left(2.\frac{\pi}{3}\right) + 32.\frac{2\pi}{3} = 363\pi$$

Bài 28. Điều kiện phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \ne 1 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

Khi đó phương trình đã cho

$$\frac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\sin x}-\mathrm{tg}^2x\,.\sin x=\frac{1+\sin x}{2}+\mathrm{tg}^2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{2}+\mathrm{tg}^2x(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\cos^2 x\right)=\left(1-\sin^2 x\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{tg}^2x\right)=\frac{1}{2}\cos^2 x+\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ \ k\notin Z$$

Đối chiếu điều kiện phương trình

$$\Rightarrow \text{ĐS: } x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in Z$$

Bài 29. Phương trình đã cho

$4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4\cos x = 2\cos 2x + 2\cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos 2x.\ \cos^2 x \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\\ \cos x.\cos 2x=1\end{array}\right.$$

Vì $|\cos x|,\ |\cos 2x|\leq 1|\ \Rightarrow \cos x\ .\ \cos 2x = 1$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{I})\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\ \text{hoặc}\,(\mathrm{II})\begin{cases}\cos x=-1 & (a)\\ \cos 2x=-1 & (b)\end{cases}$$

- (I) cho $x = k2\pi,\ k\in Z$
- (II) cho $x = (2k+1)\pi$ không thoả II/b/ ⇒ Vô nghiệm

$$\text{ĐS: } x=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k2\pi,\ \ k\in Z\right\}$$

Bài 30. Phương trình

$$3tg3x + cotg2x = 2tgx + \frac{2}{\sin 4x}$$ (1) có điều kiện:

$\cos 3x \,.\, \sin 2x \,.\, \cos x \,.\, \sin 4x \neq 0$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3(tg3x - tgx) = \dfrac{2}{\sin 4x} - (cotg2x + tgx)$

$$\Leftrightarrow \quad 3.\frac{\sin(3x - x)}{\cos 3x.\cos x} = \frac{2}{\sin 4x} - \frac{\cos(2x - x)}{\sin 2x.\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6\sin x}{\cos 3x} = \frac{2}{\sin 4x} - \frac{2\cos 2x}{\sin 4x} \Leftrightarrow 6\cos 2x = 4\cos^2 x - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi,\ \text{với}\ \cos\alpha = -\frac{1}{4},\ k \in Z$$

Bài 31.

Phương trình $|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2\sin x - \cos 2x$

$\Leftrightarrow |\sin 2x(\sin x + 1)| = \sin x(1 + \sin x)$. Vì $1 + \sin x \geq 0, \forall x \Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow (1 + \sin x)(|\sin 2x| - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x \geq 0 \\ \sin 2x - \sin x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2x < 0 \\ \sin 2x + \sin x = 0 \end{cases} \\ 1 + \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow ĐS:\ x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$$

Bài 32.

Phương trình: $\sin x + \sqrt{3}.\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2+2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2+2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq 0\\ 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq 0\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq 0 \quad \Leftrightarrow k2\pi\leq x+\frac{\pi}{3}\leq \pi+k2\pi\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{thoả } \forall x\end{cases}$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $-\frac{\pi}{3}+k2\pi\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\quad k\in Z$

Bài 33. Phương trình $\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos 2\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{1+\cos 2x}{2}\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)-1=\frac{1+\cos 3\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\left(\frac{2x}{3}\right)-4\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)-3\cos\left(\frac{2x}{3}\right)+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{2x}{3}-1\right)\left[4\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)-3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{2x}{3}=1\\ \cos^2\left(\dfrac{2x}{3}\right)=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k3\pi, k\in Z\\ \cos\left(\dfrac{4x}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{4x}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{3\pi}{2}, k\in Z\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x=\left\{k3\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{3\pi}{2},\ \ k\in Z\right\}$

Bài 34. Điều kiện của phương trình:

$tg^2(2x).\ tg^2(3x).\ tg5x = tg^2(2x) - tg^2(3x) + tg5x$ (1) là:

$\cos 2x.\ \cos 3x.\ \cos 5x \neq 0$ (2)

Khi đó phương trình

$\Leftrightarrow tg5x(tg^2 2x.\ tg^2 3x - 1) = tg^2 2x - tg^2 3x$ (3)

Trong đó: $tg^2 2x.\ tg^2 3x - 1 \neq 0$, vì nếu ngược lại, thì có:

$$\begin{cases}tg^2 2x.tg^2 3x=1\\ tg^2 2x-tg^2 3x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tg^2 2x=1\\ tg^2 3x=1\end{cases}$$ nhưng hệ này vô nghiệm

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ $tg5x=\dfrac{tg^2 2x-tg^2 3x}{tg^2 2x.tg^2 3x-1}$

$$\Leftrightarrow tg5x=\frac{tg2x-tg3x}{tg2x.tg3x+1}.\frac{tg2x+tg3x}{tg2x.tg3x-1}=tg2x.tg5x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}tg5x=0\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{5}, k\in Z & \text{Thoả mãn (2)}\\ tgx=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z, & \text{loại vì không thoả mãn (2)}\end{array}\right.$$

ĐS: $x=k\dfrac{\pi}{5},\ k\in Z$

Bài 35. Điều kiện phương trình:

$$\sin x \,.\, \mathrm{tg}2x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}2x) = 3\sqrt{3} \quad (1)$$

là: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z \qquad (3)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sin x\,(\mathrm{tg}2x + \sqrt{3}) = 3(\mathrm{tg}2x + \sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \mathrm{tg}2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$ (4) thoả mãn (3)

* Mặt khác $2 + \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4 \qquad (5)$

* (4) và (5) $\Rightarrow k \geq 3$

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \;\; 3 \leq k \in Z$

Bài 36.

Điều kiện phương trình: $3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\mathrm{tg}x$ (1)

là: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in Z \qquad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3\sin x\left(\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right) = 2(1 - \cos x)$

$\Leftrightarrow (3\mathrm{tg}x + 2)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1 \\ \mathrm{tg}x = -\frac{2}{3}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Đối chiếu (2)

có ĐS: $x = \left\{k2\pi, \alpha + k\pi, \text{với } \mathrm{tg}\alpha = -\frac{2}{3}, \; k \in Z\right\}$

Bài 37. Phương trình (1)

$$\sin x.\, \cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos 4x - \frac{1-\cos 4x}{2} = 2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]-\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right) = -2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{7\pi}{6}+k2\pi, \quad k\in Z\right\}$$

Vì $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow$ có

ĐS: $x = \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

Bài 38. Dễ thấy phương trình:

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right] = 1 \qquad (1)$$

Có: $9x^2 + 160x + 800 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right) = k2\pi, \ \ k\in Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-16k>0 \\ (3x-16k)^2 = 9x^2+160x+800 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{16k}{3} & (2) \\ x = \dfrac{8}{3}k - \dfrac{40}{9} - \dfrac{25}{9(3k+5)} & (3) \end{cases}$$

Trong đó (3) $\Leftrightarrow 9x = 24k - 40 - \frac{25}{3k+5}$

$\Rightarrow x\in Z \Leftrightarrow \frac{25}{3k+5} \in Z \Leftrightarrow 25 \vdots (3k+5) \Leftrightarrow k = \{-2, -10\}$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \{-7, -31\}$

Bài 39. Phương trình

$$2\cos^2x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = \cos4x\,(2\sin2x + 1) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\cos^2x + \cos^2 3x - 1) + \cos4x = 2\cos4x.\,\sin2x + \cos4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 3x + \cos^2x - 1 \qquad = \sin2x.\,\cos4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos2x + \cos6x) = \sin2x.\,\cos4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos 2x = \sin 2x\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$

Bài 40. Phương trình

$$\text{tg}x + 2\text{cotg}2x = \sin2x \qquad (1)$$

Có điều kiện: $\cos x.\,\sin2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z \qquad (2)$

* Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{2\cos 2x}{2\sin x\cos x} = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \text{cotg}x = \sin2x \Leftrightarrow 2\sin^2x = 1 \ \Leftrightarrow \cos2x = 0$

* Đối chiếu điều kiện (2) $\Rightarrow$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

Bài 41. Phương trình

$$\sin^2x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 4x\right) = 1 - \sin^2\ 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 3x + \cos 3x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos3x.\,\cos2x.\,\cos x = 0 \Rightarrow$$

ĐS: $x = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},\ k \in Z\right\}$

Bài 42. Phương trình

$$\sin^8x + \cos^8x = 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x) + \frac{5}{4}\cos2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^8x(1-2\sin^2x) + \cos^8x(1 - 2\cos^2x) = \frac{5}{4}\cos2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin^8 x = \dfrac{5}{4} + \cos^8 x > 1 \Rightarrow \text{Vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \ \ k \in Z$$

Bài 43. Phương trình

$$1 + \sin x + \cos3x = \cos x + \sin2x + \cos2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - \cos2x) + \sin x = (\cos x - \cos3x) + \sin2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\sin x + 1) = \sin2x(2\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \sin 2x \end{array}\right. \quad ĐS\text{: } x = \left\{\begin{array}{l} \ell2\pi, \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \\ \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, \ell, k \in Z \end{array}\right\}$$

Bài 44.

Với $\forall x \in R$, Phương trình:

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x.\cos^2 2x} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0 & (2) \\ 4\sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + 8\sin 2x\cos^2 2x & (3) \end{array}\right.$$

Trong đó (3) $\Leftrightarrow 2(1 + \sin 6x) = 1 + 8\sin 2x.\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow\ 1 + 2(3\sin 2x - 4\sin^3 2x) = 8\sin 2x - 8\sin^3 2x$

$$\Leftrightarrow\ \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi,\ \ \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ \ k \in Z\right\}$$

Kiểm tra điều kiện (2)

$$+ \text{ Với } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ nếu } k = 2\ell \\ -1 \text{ nếu } k = 2\ell + 1 \end{array}\right. \quad \ell \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \ell 2\pi,\ \ell \in Z \text{ lấy được}$$

$$+ \text{ Với } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \text{ làm tương tự , có:}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + (2\ell + 1)\pi, \ell \in Z \text{ lấy được}$$

$$\Rightarrow ĐS: x = \left\{\frac{\pi}{12} + \ell 2\pi,\ \frac{5\pi}{12} + (2\ell + 1)\pi,\ \ell \in Z\right\}$$

Bài 45. Phương trình:

$$\frac{3(\operatorname{tg}x + \sin x)}{\operatorname{tg}x - \sin x} - 2\cos x = 2 \qquad (1)$$

có điều kiện: $\sin x \,.\, \cos x \neq 0$ (2)

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{3(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \qquad (3)$$

Đối chiếu với (2), (3)

$$\Rightarrow ĐS\text{: } x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \qquad k \in Z$$

Bài 46. Phương trình

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\text{tg}x + \text{cotg}x) \qquad (1)$$

có điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

$\Rightarrow$ *ĐS*: Vô nghiệm

Bài 47. Phương trình

$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x.\text{cotg}x + \cos^3 x.\text{tg}x = \sqrt{2\sin 2x}$ (1)

có điều kiện $\sin 2x > 0$ (2)

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Đối chiếu điều kiện (2), (3) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$

Bài 48. Phương trình

$(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$ (1)

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 1 - 4\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 + 2\sin x)(3\cos 4x - 3) = 0$

$$ĐS\text{: } x = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k\frac{\pi}{2},\ \ k \in Z\right\}$$

Bài 49. Phương trình

$\sin 2x(\text{cotg}x + \text{tg}2x) = 4\cos^2 x$ (1)

có điều kiện là $\sin x \,.\, \cos 2x \neq 0$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}.\dfrac{\cos x}{\sin x} = 4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 2\cos^2 x \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \text{ đối chiếu ((2)}$$

$$\Rightarrow ĐS\text{: } \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z\right\}$$

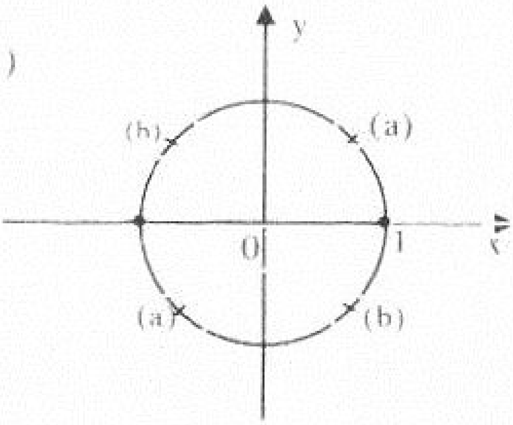
Bài 50. Phương trình

$$\frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}} - \sqrt{2} = $$
$$= -\sqrt{2}\left(\frac{1 + 3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \quad (1)$$

có điều kiện $x \neq k\pi$, $k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x|\sin x|} - 1 = \dfrac{-\left(1 + 3\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = -1 - 3\cos^2 x, \text{ nếu } \sin x > 0 \Rightarrow \text{vô nghiệm} \\ \sin^2 x = 3\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos 2x = -1 \end{array}\right.$$



$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \text{ nếu } \sin x < 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + k\pi & (a) \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi & (b) \end{array}\right.$$

kết hợp điều kiện (2), (3) ta có

$$ĐS: x = \left\{\frac{\pi}{3} + (2l+1)\pi,\ -\frac{\pi}{3} + l2\pi,\ l \in Z\right\}$$

Bài 51. Phương trình

$$\text{tg}x - 3\text{cotg}x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

có điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 4\sin x \cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -\sqrt{3} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad ĐS: x = \left\{\begin{array}{ll} -\frac{\pi}{3} + k\pi & \\ -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} & k \in Z \end{array}\right\}$$

Bài 52. Phương trình

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{in}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin 3\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=0\\ 1-4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}=k\pi,\quad k\in Z\\ \cos 2\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in Z\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad \text{ĐS}: x=\left\{\frac{3\pi}{5}-k2\pi,\ \frac{14\pi}{15}-k2\pi,\ \frac{4\pi}{15}-k2\pi,\ k\in Z\right\}$$

Bài 53. Phương trình

$$\cos^3x+\sin^3x=\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1-\cos x)(1+\sin x)=0\Rightarrow$$

$$\text{ĐS}: x=\left\{-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k2\pi,\ \frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in Z\right\}$$

Bài 54. Phương trình

$3\sin x+2\cos x=2+3\operatorname{tg}x$ (1) có điều kiện $\cos x\neq 0$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3\sin x\left(\dfrac{\cos x-1}{\cos x}\right)+2(\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(3\sin x - 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \operatorname{tg}x = \dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp (2), có *ĐS*: $x = \left\{k2\pi, \alpha + k\pi, k \in Z, \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}\right\}$

Bài 55. Phương trình

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x + 2$$

$\Leftrightarrow (1 + \cos 4x)(\cos 2x + \cos 6x) = \cos x \cos 2x \cos 3x + 3$

$\Leftrightarrow 4\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 3$

$\Leftrightarrow \cos x \cos 2x \cos 3x = 1$ (1). Vì $|\cos u| \le 1 \Rightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = -1\\ \cos 2x = -1\\ \cos 3x = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\cos x = -1\\ \cos 2x = 1\\ \cos 3x = -1\end{cases} \ldots \Rightarrow$$

ĐS : $x = k\pi, k \in Z$

Bài 56. Phương trình

$$\operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{cotg}^2 2x \,.\, \operatorname{cotg}3x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 2x + \operatorname{cotg}3x \quad (1)$$

có điều kiện $\cos x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 3x \neq 0$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \operatorname{cotg}3x(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 2x - 1) = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 2x$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}3x \,.\, \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 2x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{tg}^2 2x - 1}{\operatorname{tg}^2 2x} \quad (3)$$

Nếu $\operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{tg}^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{cotg}^2 2x \Rightarrow$

(1) trở thành: $\operatorname{tg}^4 x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ (a)

Nếu $\operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{tg}^2 2x - 1 \neq 0 \Rightarrow$

(3) trở thành : $\cot g3x \,.\, \dfrac{tg2x - tgx}{1 + tg2x.tgx} . \dfrac{tg2x + tgx}{1 - tg2xtgx} = 1$

$\Leftrightarrow \cot g3x \,.\, tgx.tg3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$ (b)

(2), (a) và (b) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Bài 57. Phương trình

$\sin 3x = \cos x.\ \cos 2x(tg^2x + tg2x)$ (1)

có điều kiện $\cos x, \cos 2x \neq 0$ (2)

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow \sin(2x + x) = \cos 2x \,.\, \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x.\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x = \cos 2x.\ \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \quad (3) \end{array}\right.$$

(3) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ không thỏa (2) $\Rightarrow$

ĐS: $x = k\pi,\ k \in Z$

Bài 58. Phương trình

$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos s2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + (\cos 2x - 1) = \sin 3x - \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ĐS: x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$$

Bài 59. Phương trình

$$4\sqrt{3}\,\sin x.\cos x.\cos 2x = \sin 8x \ (1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\,\sin 4x = 2\sin 4x\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ \cos 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{ĐS: } x = \left\{k\frac{\pi}{4};\ \pm\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right\}$$

Bài 60. Phương trình

$$\mathrm{tg}^2x = \frac{1+\cos x}{\cos x}\ (1) \text{ có điều kiện } \cos x \neq 0 \quad (2)$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1+\cos x = 0 & (3) \\ \cos x = \dfrac{1}{2} & (4) \end{array}\right.$$

$$\text{Kết hợp } (2) \Rightarrow \text{ĐS: } x = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ (2k+1)\pi,\ k \in Z\right\}$$

Bài 61. Phương trình

$$2\cos^2 2x + \cos 2x = 4\sin^2 2x.\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x + \cos 2x = (1 - \cos 4x)(1 + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = (1 - \cos 4x)(1 + \cos 2x) - (1 + \cos 2x)$$

$$= -\cos 4x(1 + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos x = -2 : \text{ Vô nghiệm} \end{array}\right. \Rightarrow \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4},\ k \in Z$$

Bài 62. Phương trình

$$\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = 1 - 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 4 \quad \text{Vô nghiệm} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \qquad ĐS\text{: } x = k\pi,\ k \in Z$$

Bài 63. Phương trình

$$\cos 3x \,.\, \cos^3 x - \sin 3x .\ \sin^3 x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x\left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right) - \sin 3x\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)$$

$$= \cos^3 4x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 4x = \frac{1}{4} + \cos^3 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos^2 4x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4} \\ \cos 8x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow ĐS\text{: } x = \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi,\ \pm\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4},\ k \in Z\right\}$$

Bài 64. Phương trình

1. Phương trình $f(x) = \cos^2 x.\sin^4 x + \cos 2x = 2\cos x\,(\sin x + \cos x) - 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x.\sin^4 x - 2\cos x\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x \sin x = 0 \\ \cos x \sin^3 x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin^3 x = 1 \end{array}\right. \qquad ĐS:\ x = l\frac{\pi}{2},\ l \in Z$$

2. $f(x) = \cos^2x.\sin^4x + \cos2x = \cos^2x(1 - \cos^2x)^2 + 2\cos^2x - 1$

$$= \cos^6x - 2\cos^4x + 3\cos^2x - 1 \qquad (1)$$

Đặt $t = \cos^2x \Rightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow$ (1) trở thành $g(t) = t^3 - 2t^2 + 3t - 1$

Với $t \in [0, 1] \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 4t + 3$ có $\Delta'_t < 0 \Rightarrow g'(t) > 0$ với $\forall t \in [0,1] \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $[0, 1]$. Ta có $g(0) = -1$, $g(1) = 1 \Rightarrow |g(t)| = |f(x)| \le 1 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 65. Phương trình

$$3\sin^3x - 2\sin x + \cos^3x = 0 \qquad (1)$$

Nếu $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$, không thỏa (1)

Vậy $\cos x \ne 0 \Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow 3tg^3x - 2tgx\,(1 + tg^2x) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow tg^3x - 2tgx + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tg^2x + tgx - 1 = 0 \Leftrightarrow tgx = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$ĐS:\ x = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ \alpha + k\pi;\ \beta + k\pi,\ \text{với } tg\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ tg\beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2},\ k \in Z \end{array}\right\}$$

Bài 66. Phương trình

$$\sin^2x\ \frac{(1 + \cos 2x)^2}{2\sin 2x} = \cos 2x \qquad (1)$$

có điều kiện là $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \cos^3x = \sin x - 3\sin^3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin^3x - \sin x + \cos^3x = 0$ (3)

- Dễ thấy $\cos x = 0$ không thỏa mãn (3)

- $\cos x \neq 0 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow 3\,tg^3x - tgx(1 + tg^2x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2tg^3x - tgx + 1 = 0 \Leftrightarrow (tgx + 1)(2tg^2x - 2tgx + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ 2tg^2x - 2tgx + 1 = 0 \quad \text{Vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Bài 67. Phương trình

$\sin3x + \cos2x = 1 + 2\sin x\cos2x$

$\Leftrightarrow \sin3x + \cos2x = 1 + \sin3x - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in Z\right\}$$

- Phương trình $\sin3x - 3\sin x + 2\sin^2x = 0$

$$\Leftrightarrow -4\sin^3x + 2\sin^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Vậy 2 phương trình đã cho tương đương nhau.

Bài 68. Phương trình

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x} - \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4\sin x \qquad (1)$$

có điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{-2}{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}} = 4\sin x$ (2)

Vậy (1) còn có điều kiện là $\sin < 0$ (3), và

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\cos x+1+\cos x+2\sqrt{\sin^2 x}} = 4\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2-2\sin x} = 4\sin^2 x \Leftrightarrow 8\sin^3 x - 8\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(4\sin^2 x - 2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \text{ không thỏa mãn (3)} \Rightarrow \text{loại} \\ \sin x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} = \sin(-18^0) \qquad \Rightarrow \text{Kết hợp}(2) \text{ và } (3) \text{ có} \end{array}\right.$$

ĐS: $x = \{-18^0 + k360^0,\ 198^0 + k360^0,\ k \in Z\}$

Bài 69. Phương trình

$\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\cos^2 x - 2(1 - \sin x)\cos x - 4\sin x = 0$ (2)

Coi (2) là phương trình bậc 2 đối với cosx ta có

(2) $\Leftrightarrow \cos x = 1 - \sin x \pm \sqrt{(1-\sin x)^2 + 4\sin x}$

$$\cos x = \left[\begin{array}{ll} 2 & \text{(loại)} \\ -2\sin x & \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -\alpha + k\pi,\ k \in Z,\ \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$

* *Chú ý*: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không thỏa mãn (1)

$2\cos^2 x - 1 = \sin 3x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

Bài 70. Phương trình

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \\ 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5},\ k \in Z\right\}$$

Bài 71. Phương trình

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$ (1) có điều kiện là

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ 2sinxcoss2x + cos2x = 1 (3)

Vì $\sin x \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$$ĐS\text{: } x = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$$

Bài 72. Phương trình

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{8}(\sin 2x)^4 - \sin^2 2x = \frac{17}{16}\left(1 - \sin^2 2x\right) \qquad (2)$$

Đặt $t = \sin^2 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq \Rightarrow$ (2) trở thành: $2t^2 + t - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in Z$

Bài 73. Phương trình

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x} \qquad (1)$$

có điều kiện là: $\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x + \sin x}\left(\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} - 2\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k2\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 74. Phương trình

$$2\cos^2 x + \cot g^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} \qquad (1)$$

có điều kiện là $x \neq k\pi,\ k \in Z \qquad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ Tập nghiệm của (1) là

$$x = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$$

với $\begin{cases} 2 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 40 \\ 2 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 40 \\ 2 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 40 \end{cases} \qquad k \in Z$

thì tổng các nghiệm là: $\quad S = 117\pi$

Bài 75. Phương trình

$$\cos^3 x \,.\, \cos 3x + \sin^3 x.\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos^2 3x - \sin^2 3x) + 3(\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 6x + 3\cos 2x = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4\cos^3 2x = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in Z$

Bài 76. Phương trình

$|\cot gx| = tgx + \frac{1}{\sin x}$ (1) có điều kiện là: sinx và cosx $\neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z \ (2)$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cot gx \geq 0 \\ \cot gx = tgx + \frac{1}{\sin x} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \cot gx < 0 \\ -\cot gx = tgx + \frac{1}{\sin x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{I}) \begin{cases} \cot gx \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

Bài 77.

1. Với k = 2 $\Rightarrow$ có phương trình $3\cos x + 2|\sin x| = 2$

$$\Leftrightarrow 3\cos x = 2(1-|\sin x|) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 13\sin^2 x - 8|\sin x| - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} |\sin x| = 1 \\ |\sin x| = -\dfrac{5}{13}\,(\text{loại}) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

2. Với k = 3 ⇒ có phương trình: $3\cos x + 2|\sin x| = 3$

$$\Leftrightarrow \quad 2|\sin x| = 3(1-\cos x) \geq 0 \Leftrightarrow 13\cos^2 x - 18\cos x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{k2\pi, \pm\alpha + k2\pi, k \in Z, \cos\alpha + \frac{5}{13}\right\}$$

* *Chú ý* : Nếu biện luận các trường hợp sinx ≥ 0 hoặc ≤ 0 để mở dấuTSTĐ thì sẽ dẫn đến nhiều phương trình bậc nhất đối với cosx và sinx. Do đó cách giải phức tạp.

Bài 78.

1. Khi a = 0, Phương trình 6tgx = tg2x (1) có điều kiện là:

cosx ≠ 0 và cos2x ≠ 0

$$\Leftrightarrow x \neq \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ và } \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\} (2) k \in Z$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 6\text{tg}x = \dfrac{2\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x} \Leftrightarrow 3\text{tg}^3x - 2\text{tg}x = 0$ kết hợp (2)

$$\Rightarrow ĐS:\ x = \left\{k\pi, \pm\alpha + k\pi, k \in Z, \text{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$$

2. Khi a = 5, Phương trình: $6tgx + 5cotg3x = tg2x \qquad (3)$

có điều kiện là: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \qquad (4)$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow 5(tgx + cotg3x) = tg2x - tgx$

$$\Leftrightarrow 5\frac{\cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x} \Leftrightarrow 5\cos^2 2x - \sin x.\sin 3x = 0.$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 12\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

Kết hợp (4)

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{ \begin{array}{l} \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi, \pm\dfrac{\beta}{2} + k\pi,\ k \in Z, \\ \cos\alpha = -\dfrac{1}{4},\ \cos\beta = \dfrac{1}{3} \end{array} \right\}$$

Bài 79. Phương trình

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$$

$\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x - 10\sin x.\cos^2 x = 0 \qquad (1)$

Vì cosx = 0 không thoả mãn (1) $\Rightarrow$

(1) $\Leftrightarrow 6tgx(1 + tg^2x) - 2 - 10tgx = 0 \Leftrightarrow 6tg^3x - 4tgx - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ 3tg^2x + 3tgx + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{Vô nghiệm}$$

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$$

Bài 80. Phương trình $3\cos\dfrac{4x}{5} = 2\cos^2\left(\dfrac{3x}{5}\right) + 1$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2\left(\frac{2x}{5}\right) = 2 + \cos 3\left(\frac{2x}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\left(\frac{2x}{5}\right) - 6\cos^2\left(\frac{2x}{5}\right) - 3\cos\left(\frac{2x}{5}\right) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{2x}{5} = 1 \\ 4\cos^2\left(\dfrac{2x}{5}\right) - 2\cos\dfrac{2x}{5} - 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow ĐS:\ x = \left\{5k\pi, \pm\frac{5}{2}\alpha + 5k\pi, k \in Z, \cos\alpha = \frac{1-\sqrt{21}}{4}\right\}$$

Bài 81. Phương trình

$$\sqrt{2}\ (2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\ (2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\ (2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}\ (1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow ĐS:\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$$

Bài 82. Phương trình

$$6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x} \qquad (1)$$

Có điều kiện là: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\ \cos x$ (3)

Vì cosx = 0 không thoả mãn (3) $\Rightarrow$

(3) $\Leftrightarrow 6\text{tg}x(1 + \text{tg}^2x) - 2 - 10\text{tg}x = 0 \Leftrightarrow 3\text{tg}^3x - 2\text{tg}x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{tg}x = 1. & \text{không thoả (2)} \\ 3\text{tg}^2x + 3\text{tg}x + 1 = 0: & \text{Vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: Vô nghiệm

Bài 83. Phương trình

$$\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1 \qquad (1)$$

có lượng dưới dấu căn thức luôn > 0 với với $\forall x \Rightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \sin x \le 1 & (2) \\ 3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\} \end{cases}$$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

Bài 84. Phương trình

$$\frac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1 \qquad (1)$$

Có điều kiện là $\sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z \quad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2\cos^2x - 3\sqrt{2}.\cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = \left\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$

Bài 85.

Phương trình : $4\cos^3x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2x + 3\sqrt{2}\sin x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ĐS: x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$$

Bài 86.

Phương trình: $\sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}.\sin^2 x + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2} - 1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow ĐS: x = \ell\pi,\ \ \ell \in Z$$

Bài 87.

Phương trình: $2tg^2x + \frac{2}{\sin^2 x} + 5tgx + 5c\tilde{o}tg + 4 = 0$ (1)

có điều kiện là sinx và $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2(tg^2x + cotg^2) + 5(tgx + c\tilde{o}tg) + 2 = 0$ (3)

$$\Leftrightarrow tgx + cotgx = \left\{-2,\ -\frac{1}{2}\right\}$$

Vì tgx và cotg luôn cùng dấu với $\forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$

$\Rightarrow$ Áp dụng BĐT côsi ta có $|\text{tgx} + \text{cotgx}| \geq 2 \Rightarrow$

(3) $\Leftrightarrow \text{tgx} + \text{cotgx} = -2 \Leftrightarrow \text{tg}^2x + 2\text{tgx} + 1 = 0$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Bài 88.

Phương trình: $\cos^6x - \sin^6x = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow (\cos^2x - \sin^2x)(1 - \sin^2x\cos^2x) = \frac{13}{8}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right) = \frac{13}{8}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos^2 2x - 13\cos 2x + 6 = 0\end{array}\right.$$

ĐS: $x = \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 89.

Hàm $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{2}{5}\sin 5x$ có

$f'(x) = \cos x + \cos 3x + 2\cos 5x \Rightarrow$

Phương trình: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + \cos 3x) + 2\cos(x + 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0$

$$ĐS:\quad x = \left\{\begin{array}{l}(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ \pm\alpha + k\pi,\ \pm\beta + k\pi,\ k \in Z\\ \qquad \cos\alpha = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8},\ \cos = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\end{array}\right\}$$

Bài 90.

Phương trình : $\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}{\sin x} = 4\cos x \quad (1)$

có điều kiện $x \neq k\pi,\ k \in Z \qquad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin 2x \leq 1 \ (3) \\ 1 + |\cos 2x| = 2 - 2\cos^2 2x \Leftrightarrow \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2|\cos 2x|^2 + |\cos 2x| - 1 = 0$$

Kết hợp (2) và (3) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 91. Phương trình

$\cos^3x - \sin^3x = \sin x + \cos x$ (1) có $\cos x = 0$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow 2tg^3x + tg^2x + tgx = 0$.

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = k\pi,\ k \in Z$

Bài 92.

Phương trình : $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3} - 1)\cos^2x + 1$

$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})\sin x\cos x = (\sqrt{3} - 1)\cos^2x + 1$ (1), có $\cos x = 0$ không thỏa mãn

$\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow tg^2x - (1 + \sqrt{3})\,tgx + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow tgx = \{1,\ \sqrt{3}\}$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 93. Phương trình

$3\cot g^2x + 2\sqrt{2}\sin^2x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$ có điều kiện là (2)

$$\begin{cases} 0 < \cos x \le 1 \\ \sin x \ne 0 \end{cases}$$ Khi đó (1)

$\Leftrightarrow$ $3\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin^4 x - 2\cos x\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow$ $3\cos x(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x) - 2\sin^2 x(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sqrt{2}\sin^2 x = 0 \\ 3\cos x - 2\sin^2 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$

Bài 94. Phương trình

$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$

$\Leftrightarrow$ $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 2 + 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}\sin x\cos x + \sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \cos^2 x$ (2)

Vì $\cos x = 0$ không thỏa mãn (2) $\Rightarrow$

(1) $\Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \text{tg}^2 x - \sqrt{2}\,\text{tg}x + 2 - \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow$ *ĐS*: Vô nghiệm

* Cách khác: (2) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)(1 + \cos 2x) = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$ có

$(3 - \sqrt{2})^2 > (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow$ *ĐS*: Vô nghiệm

Bài 95.

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + \left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 4\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow ĐS\text{: } x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$$

Bài 96. Phương trình

$\sin 2x + 2\text{tg}x = 3 \quad (1)$

Có điều kiện là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \quad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2\text{tg}^3x - 3\text{tg}^2x - 4\text{tg}x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = 1 \\ 2\text{tg}^2x - \text{tg}x + 3 = 0 \quad \text{Vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow ĐS\text{: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$$

Bài 97. Phương trình

$$48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x}(1 + \text{cotg}x\,.\,\text{cotg}2x) = 0 \qquad (1)$$

Có điều kiện là $x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x}.\frac{\cos x}{\sin x.\sin 2x} = 0$

$$\Leftrightarrow 48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\sin^4 x} = 0$$

$\Leftrightarrow 48\sin^4x.\cos^4x - \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 6\sin^4 2x + \sin^2 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in Z$

Bài 98. Phương trình

$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}\ (1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos 2x + (4 + \sqrt{2})\sin x - (2 + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\sin^2x - (4 + \sqrt{2})\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 99. Phương trình

$2\cos 2x - 4\cos x = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2x - 4\cos x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$. Kết hợp điều kiện $\sin x \geq 0 \Rightarrow$

ĐS: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

Bài 100. Phương trình

$\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5} \Leftrightarrow 5(3\sin x - 4\sin^3x) = 3(\sin x.\cos 4x + \cos x.\sin 4x)$

$\Leftrightarrow 5\sin x(3 - 4\sin^2x) = 3\sin x(\cos 4x + 4\cos 2x.\ \cos^2x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 3\cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \ ĐS:\ x = \left\{k\pi, \pm\alpha + k\pi,\ k \in Z,\ \cos\alpha = -\frac{2}{3}\right\}$$

Bài 101. Phương trình

$$3\sin x + 2\,|\cos x\,| = 2 \Leftrightarrow 3\sin x = 2(1 - |\cos x|)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geq 0 \quad (*)\\ 9\sin^2 x = 4 - 8|\cos x| + 4\cos^2 x \Leftrightarrow 13|\cos|^2 - 8|\cos x| - 5 = 0\end{cases}$$

Kết hợp (*) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = k\pi,\ k \in Z$

Bài 102. Phương trình

$\sin 4x = \text{tg}x$ (1) có điều kiện là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,(2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{k\pi, \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi, k \in Z, \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right\}$

Bài 103. Phương trình

$$\sqrt{3 + 4\sqrt{6} - \left(16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}\right)\cos x} = 4\cos x - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{4} \leq \cos x \leq 1 \quad (*)\\ 16\cos^2 x + 8\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\cos x - 4\sqrt{6} = 0 \text{ có } \Delta' = 16\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2\end{cases}$$

Kết hợp (*) $\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$

Bài 104. Phương trình

$$\sin^2x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}\cos2x - \frac{1}{2}\cos6x - 3\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^3 2x + 3\cos^2 2x - \cos2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos 2x - 1 = 0 \\ \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in Z, \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$$

Bài 105. Phương trình

$$\cos7x - \sin5x = \sqrt{3}(\cos5x - \sin7x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos5x + \frac{1}{2}\sin5x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} + 7x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right)$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{12}, \ k \in Z\right\}$$

Bài 106. Phương trình:

$$\cos^2x + 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 3\sin^2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2x + \sqrt{3}\sin2x = 0 \Leftrightarrow \cos2x - \sqrt{3}\sin2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \left\{k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z,\right\}$$

Bài 107. Phương trình:

$$3\sin\left\{x-\frac{\pi}{3}\right\}+4\sin\left\{\frac{5\pi}{6}-x\right\}-5\sin\left\{2x+\frac{\pi}{3}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{3}{5}\sin\left\{x-\frac{\pi}{3}\right\}+\frac{4}{5}\cos\left\{x-\frac{\pi}{3}\right\}=\sin\left\{2x+\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5}\\ \sin\left(\alpha+x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad ĐS:\ \left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{2\pi}{3}+\alpha+12\pi,\\ \dfrac{\alpha}{3}+(2k+1)\dfrac{\pi}{3}\qquad l,k\in Z\end{array}\right\}$$

Bài 108. Giả sử $a^2+b^2\neq 0\Rightarrow\begin{cases}a\cos x_1+b\sin x_1=0 & (1)\\ a\cos x_2+b\sin x_2=0 & (2)\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\Rightarrow$ Hệ (1), (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x_1-\alpha)=0\\ \cos(x_2-\alpha)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x_2-\alpha=\dfrac{\pi}{2}+l\pi\end{cases}\quad k,\ l\in Z\Rightarrow x_1-x_2=(k-1)\pi=k'\pi,\ k'\in Z$$

$\Rightarrow$ Trái giả thiết

Vậy $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0\Leftrightarrow f(x)=0$ với $\forall x$, là điều phải chứng minh

Bài 109. Phương trình:

$\sin^2x - \sin2x - 3\sin x - 2\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2x - (2\cos x + 3)\sin x - 2\cos x - 4 = 0$

Coi (1) là phương trình bậc 2 với sinx ta có:

$\Delta = (2\cos x + 3)^2 + 4(2\cos x + 4) = (2\cos x + 5)^2$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 2\cos x + 4 & (2) \\ \sin x = -1 & (3) \end{array}\right.$$

(2) $\Leftrightarrow \sin x - 2\cos x = 4$ có $4^2 > 1^2 + (-2)^2 \Rightarrow$ (x) vô nghiệm

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

Bài 110.

Phương trình: $2\sin2x - \cos2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

$\Leftrightarrow (2\sin2x - 2\cos x) + (2\sin^2x - 7\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\cos x + \sin x = 3 \text{ có } 3^2 > 2^2 + 1^2 \Rightarrow \text{vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 111. Phương trình

$4\sin^3x.\cos3x + 4\cos^3x.\sin3x + 3\sqrt{3}\cos4x = 3$

$\Leftrightarrow \sin4x + \sqrt{3}\cos4x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos4x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(4x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{-\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right\}$

Bài 112. Phương trình

$$\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin 2x - \sin x) + 2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - 1) + (4\cos^2 x + 4\cos x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1)(2\cos x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ 2\cos x + \sin x = -3 \quad \text{có}\,(-3)^2 > 2^2 + 1 \Rightarrow \text{Vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z$$

Bài 113. Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$ ta có phương trình:

$$1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{3t - t^3}{2} = \frac{3}{2}(t^2 - 1) \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0(1) \quad \text{Vì } |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(1) \Leftrightarrow t = \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\text{: } x = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\pi + 2k\pi,\ k \in Z,\right\}$$

Bài 114. Phương trình

$$5\cos^4 x + 3\cos^3 x\sin x + 6\cos^2 x\sin^2 x - \cos x\sin^3 x + \sin^4 x = 2 + \frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) +$$

$$+ \cos x\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos^3 x.\sin x - 2 = \frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\cos^2x+\sin^2x+\frac{\sin 2x.\cos 2x}{2}+2\cos^3x.\sin x-2=\frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2x+(2\cos^2x-1)+\frac{\sin 2x.\cos 2x}{2}+2\cos^3x.\sin x=\frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2x\,(1+\sin x\cos x\;)+\cos 2\,x+\frac{\sin 2x.\cos 2x}{2}=\frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+\cos 2x)\left(1+\frac{\sin 2x}{2}\right)+\cos 2x+\frac{\sin 2x.\cos 2x}{2}=\frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+2\cos 2x+\frac{\sin 2x}{2}+\sin 2x.\cos 2x=\frac{3}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x.\cos 2x+\cos 2x+\sin 2x+2=0$$

Đặt $t=\sin 2x+\cos 2x \Rightarrow |t|\leq \sqrt{2}$ và

(1) $\Leftrightarrow t^2-1+t+2=0 \Leftrightarrow t^2+t+1=0$ Vô nghiệm

ĐS: Vô nghiệm.

Bài 115. Phương trình : $\sin x+\sin^2x+\cos^3x=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\sin^2x+\cos x(1-\sin^2x)=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\sin x+\cos x+\sin x.\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x+\cos x+\sin x.\cos x=0\Leftrightarrow\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)-1=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow \textit{ĐS}:\ x=\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\alpha,k\in Z,\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right\}$$

Bài 116. Phương trình

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x} \ (1) \text{ có điều kiện là:}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \ (2)$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}$

$\Leftrightarrow (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos^2 x\sin^3 x - \sin^2 x\cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x + \cos x + \sin x - \cos^2 x\sin^2 x) = 0 \ (3)$

Đặt $t = \cos x + \sin x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$ và $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2} \Rightarrow$

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)^2 - \dfrac{t^2-1}{2} - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 - 4t - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2(t^2 - 2t - 1) = 0$$

Kết hợp (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ĐS\text{: } x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi, k \in Z, \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right\}$$

Bài 117. Phương trình

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3} \qquad (1)$$

Có điều kiện là $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$ (2)

Khi đó (1) ⇔ $(\cos x + \sin x) + \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x.\sin x} = \dfrac{10}{3}$ (3)

Đặt $t = \cos x + \sin x \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$ (4)

$\Rightarrow$ (3) ⇔ $(t - 2)(3t^2 - 4t - 5) = 0$

Kết hợp (2) và (3) ⇒

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{-\frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi, \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi, k \in Z, \sin\alpha = \frac{2-\sqrt{19}}{3}\right\}$$

Bài 118. Phương trình

$$\text{cotgx} - \text{tgx} = \sin x + \cos x \qquad (1)$$

có điều kiện là $x \ne \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z$ (2)

khi đó (1) ⇔ $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - \sin x.\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \text{tgx} = -1 \\ \begin{cases} t^2 + 2t - 1 = 0 \\ t = \cos x - \sin x, |t| \le \sqrt{2} \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

Kết hợp (2) và (3) ⇒

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi, k \in Z, \cos\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Bài 119. Phương trình:

$$2(\text{tgx} - \sin x) + 3(\text{cotgx} - \cos x) + 5 = 0 \qquad (1)$$

có điều kiện là $x \ne k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) ⇔ $2\sin x\left(\dfrac{1 - \cos x}{\cos x}\right) + 3\cos x\left(\dfrac{1 - \sin x}{\sin x}\right) + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow [2\sin^2x(1-\cos x) + 2\sin x.\cos x] + [3\cos^2x(1-\sin x) +$$
$$+ 3\sin x.\cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 3\cos x)(\sin x + \cos x - \sin x.\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -\dfrac{3}{2} \\ \begin{cases} t^2 - 2t - 1 \\ t = \sin x + \cos x,\ |t| \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ⇒

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{\alpha + k\pi, \text{tg}\alpha = -\frac{3}{2};\ -\frac{\pi}{4} + \beta + k\pi,\right.$$
$$\left.\frac{3\pi}{4} - \beta + k\pi, \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, k \in Z\right\}$$

Bài 120. Phương trình

$$\text{tg}x + \text{tg}^2x + \text{tg}^3x + \text{cotg}x + \text{cotg}^2x + \text{cotg}^3x = 6 \qquad (1)$$

có điều kiện là $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (\text{tg}x + \text{cotg}x) + [(\text{tg}x + \text{cotg}x)^2 - 2] +$

$$[(\text{tg}x + \text{cotg}x)^3 - 3(\text{tg}x + \text{cotg}x)] = 6 \ (3)$$

Đặt $t = \text{tg}x + \text{cotg}x \Rightarrow |t| \ge 2$ (4) (vì tgx, cotgx luôn cùng dấu ⇒ theo BĐT Cô si ta có (4)) ⇒

(3) $\Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

Kết hợp (2), (4) ⇒ *ĐS*: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Bài 121.

Phương trình: $2\sin x + \text{cotg}x = 2\sin x + 1$ (1)

có điều kiện là $x \neq k\pi,\ k \in Z$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x.\cos x + \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x - \cos x - 2\sin x\cos x = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$ và $|t| \neq 1_{(4)}$ (vì nếu

$|t| = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Rightarrow$ không thoả mãn (2))

Khi đó (3) $\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow$

Kết hợp (2), (4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad ĐS: \quad x = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi, \\ \dfrac{5\pi}{4} - \alpha + k2\pi, k \in Z, \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

Bài 122.

$\sin 2x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - (\sin x - \cos x) = 1$ (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow t^2 - t = 0$

Kết hợp (2)

$$\Rightarrow ĐS: x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (2k+1)\pi,\ \ k \in Z\right\}$$

Bài 123.

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$, (1), ta có

Phương trình $2\sin 2x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 2t - 1 = 0$

Kết hợp (1) $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi,\ k \in Z,\ \cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Bài 124.

$\sin^3x + \cos^2x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(1 - \cos^2x) + \cos x(1 + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x + \sin x - \sin x\cos x = 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

ĐS: $x = \left\{(2k+1)\pi,\ \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi,\ k \in Z,\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right\}$

Bài 125.

Phương trình : $2\cos 2x + \sin^2x\cos x + \cos^2x\sin x = 2(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow 2(\cos^2x - \sin^2x) + \sin x\cos x(\cos x + \sin x) - 2(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\,[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2] = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \cos x - \sin x \Rightarrow |t| \le \sqrt{2} \ \Rightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0\\ t^2 - 4t + 3 = 0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k2\pi,\ k \in Z\right\}$

Bài 126. Phương trình

$\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^23x = \sin x \,.\, \sin^23x \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x - \sin x\,.\,\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^4 3x) - \frac{1}{4}\sin^4 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\left(1 - \sin^2 3x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2(3x) & (2) \\ \sin 6x = 0 \quad\quad \Leftrightarrow \quad x = k\dfrac{\pi}{6} & (3) \end{cases}$$

* Trường hợp 1: k = 2l + 1 , $\ell \in Z$ ⇒ thay (3) vào (2) có

$$\sin(2l+1)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2\left(3(2\ell+1)\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin(2\ell+1)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2\ell+1)\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + h2\pi \\ (2\ell+1)\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + h2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow [\ell = 6h\ell = 2 + 6h \quad \Rightarrow$$

Nghiệm của hệ (2), (3) cũng là của phương trình (1) là:

$$\left[\begin{array}{l} x = [(2(6h)+1)]\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + h2\pi,\ h \in Z \\ x = [(2+6h)+1]\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + h2\pi,\ \ h \in Z \end{array}\right.$$

* Trường hợp 2: k = 2ℓ, $\ell \in$ Z. Thay (3) vào (2) có:

$$\sin(2l)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2(3(2\ell)\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow \ell\frac{\pi}{3} = h\,\pi \Leftrightarrow \ell = 3h \Rightarrow$$

Nghiệm của hệ (2), (3) cũng là của phương trình (1) là:

$$x = 2(3h).\ \frac{\pi}{6} = h\pi;\quad h \in Z$$

ĐS: $x = \left\{\frac{\pi}{6} + h2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + h2\pi,\ h\pi,\ h \in Z\right\}$

Bài 127. Phương trình: $\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x = 3$

$\Leftrightarrow (1 - \sin 5x) + (1 - \sin 6x) + (1 - \sin 7x) = 0 \quad (1)$

VT(1) là tổng các số $\geq 0 \Rightarrow$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \sin 6x = 1 \\ \sin 7x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

ĐS: Vô nghiệm

Bài 128. Phương trình: $\cos x + x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -\cos x \quad (1)$

Vì $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$

Nhưng $[-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ trên tập hợp đó $\cos x > 0$

$\Rightarrow$ VT (1) ≥ 0 còn VP $< 0 \Rightarrow$ (1) Vô nghiệm

ĐS: Phương trình vô nghiệm

Bài 129. Với $x \neq k\pi$ phương trình:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x - \frac{2}{3\sin^2 x} - \frac{8}{3}\sin^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = \frac{8}{3}\sin^4 x + \frac{2}{3\sin^2 x} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT BCS với VT(1) có: $\cos x + \sqrt{3}\sin x \leq 2$

Áp dụng BĐT Côsi với VP (1) có: $\frac{8}{3}\sin^4 x + \frac{2}{3\sin^2 x} =$

$$= \frac{8}{3}\sin^4 x + \frac{1}{3\sin^2 x} + \frac{1}{3\sin^2 x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8\sin^4 x}{27\sin^4 x}} = 2$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 & (2) \\ \frac{8}{3}\sin^4 x + \frac{2}{3\sin^2 x} = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (a)}$$

$(3) \Leftrightarrow 8\sin^6 x + 2 = 6\sin^2 x \Leftrightarrow 8\sin^6 x - 6\sin^2 x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 8(\sin^6 x + 1) - 6(\sin^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + 1)\,[4(\sin^4 x - \sin^2 x + 1) - 3] = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b)

(a) và (b) $\Rightarrow$ hệ (2), (3), tức phương trình đã cho vô nghiệm.

ĐS: Vô nghiệm

Bài 130. Phương trình

$$1 = \sin^7 x.\ \sin 3x + \frac{1}{2}\sin^2 2x + \cos 2x$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = 3\sin^8 x - 4\sin^{10} x + 2\sin^2 x.\ \cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin^4 x = 0 & \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in Z \\ 4\sin^6 x - 3\sin^4 x + 2 = 0 & (1) \end{array}\right.$$

Với (1) đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ (2)

Xét $f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2 = 0$; trên $[0, 1]$

$f'(t) = 12t^2 - 6t \Rightarrow$ có bảng biến thiên

t		0		$\frac{1}{2}$		1
f'(t)	+		-	0	+	
f(t)			↘	$\frac{7}{4}$	↗	

Vậy trên [0, 1]

$\Rightarrow f(t) \geq \frac{7}{4}$

⇒ (3) vô nghiệm

⇒ (1) Vô nghiệm

ĐS: $x = k\pi, k \in Z$

Bài 131. Phương trình

$$3\cos^2x + \sin^2x - 3\sqrt{3} - 3\sin x + \sqrt{3}\sin 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [\sin^2x + (\sqrt{3}\cos x)^2 + 2\sqrt{3}\sin x.\cos x] - 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 - 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + 2 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x \Rightarrow$ Theo BĐT B.C.S; $|t| \leq 2$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \{1, 2\}$

- Với $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in Z\right\} \qquad (a)$$

- Với $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad , k \in Z \qquad (b)$$

- (a) và (b) ⇒ *ĐS*: $x = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in Z\right\}$

Bài 132. Phương trình $x + 2 - 2^{\cos 2x} = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 2^{1-2\sin^2 x} \Leftrightarrow x + 2 = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x} \qquad (1)$$

- Trên đoạn $[0, 1] \Rightarrow$ $y = x + 2$ đồng biến

$y = 2\sin^2 x$ đồng biến ($[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$)

$\Rightarrow y = 2 . \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}$ nghịch biến

- Trên đoạn $[0, 1]$ có $x = 0$ thỏa mãn (1)

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho:

ĐS: $x = 0$

Bài 133. Xét hàm số $f(x) = 1 - x + \cos x$ trên $[0, 2\pi] \Rightarrow$

$$f'(x) = -1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

Vì $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ trên $[0, 2\pi]$. $\Rightarrow f(x)$ đơn điệu giảm.

Bảng biến thiên

Trên đoạn $\left(1 - \frac{3\pi}{2}\right) \subset [0, 2\pi]$ ta có $f(x)$ liên tục, đơn điệu giảm và $f(0).f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$

x	0		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'(x)		-	0	-	
f(x)	2	↘	$\left(1 - \frac{3\pi}{2}\right)$	↘	$(2 - 2\pi)$

Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \subset [0, 2\pi]$

Bài 134. Phương trình $x^2 - 2x.\sin(xy) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [x - \sin(xy)]^2 + [1 - \sin^2(xy)] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(xy) \\ \sin(xy) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow (I)\begin{cases} x = \sin(xy) \\ \sin(xy) = 1 \end{cases} \text{ hoặc } (II)\begin{cases} x = \sin(xy) \\ \sin(xy) = -1 \end{cases}$$

- Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sin y = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z \end{cases}$ (a)

- Hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sin y = -1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z \end{cases}$ (b)

- (a) và (b) $\Rightarrow$ *ĐS*: 2 nghiệm là

$$\left(1, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), \left(-1, -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in Z$$

Bài 135. Phương trình

$$\cos^4x + \sin^4x = |\cos x| + |\sin x|$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = |\cos x| + |\sin x| \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \cos^2 2x = 1 + |\sin 2x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ |\sin 2x| + \sin^2 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \geq 0 & (1) \\ \sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) có $\cos k\pi \geq 0 \Rightarrow k = 2\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \ell\pi, \ell \in Z$

Bài 136. Phương trình

$\cos 2x - \cos 6x + 4(3\sin x - 4\sin^3x)$

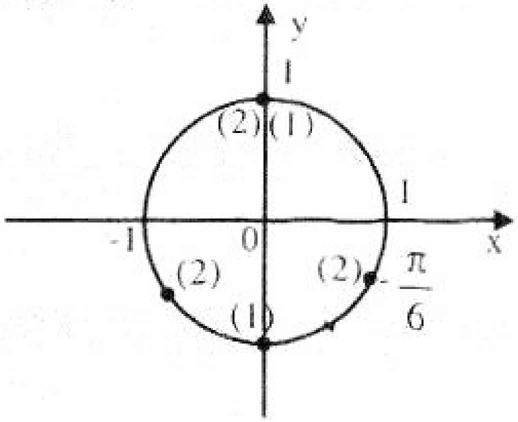
$\Leftrightarrow 2\cos^2x - 1 - (1 - 2\sin^2 3x) + 4(\sin3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2x + 2\sin^2 3x + 4\sin3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2x + 2(\sin3x + 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi & (1) \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} & (2) \end{cases}$$



$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \dfrac{\pi}{2} + \ell 2\pi,\ \ell \in Z$

Bài 137. Phương trình

$$\sin^2x + \sin^2y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \cos(x + y).\cos(x - y) - \cos^2(x + y) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x + y) + \cos(x - y).\cos(x + y) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos(x + y) + \frac{1}{2}.\cos(x - y)]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - y) = 0 \quad \Leftrightarrow\ x - y = k\pi, \quad k \in Z \\ \cos(x + y) + \dfrac{1}{2}\cos(x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k\pi, \ \ k \in Z \\ \cos(x + y) = -\dfrac{1}{2}\cos k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k\pi \\ \cos(x + y) = \cos\dfrac{2\pi}{3}\cos k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pi \\ \cos(x + y) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + k\pi\right) \end{cases}$$

(Công thức cộng cung)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k\pi,\ k \in Z \\ x + y = \pm\left(\dfrac{2\pi}{3} + k\pi\right) + \ell 2\pi,\ \ell \in Z \end{cases}$$

ĐS: 2 nghiệm: $\left(x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi + \ell\pi,\ y = \dfrac{\pi}{3} + \ell\pi\right)$ và $\left(x = -\dfrac{\pi}{3} + \ell\pi,\ y = -\dfrac{\pi}{3} - k\pi + \ell\pi\right)$, $k, \ell \in Z$

Bài 138. Phương trình

$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{cotg}^2(x + y) = 1 \quad (1)$

Có điều kiện là x và $y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \quad (2)$

Khi đó: vì $\operatorname{cotg}(x + y) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}x.\operatorname{cotg}(x + y) + \operatorname{tg}y\ .\ \operatorname{cotg}(x + y) = 1 = VP\ (1)$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y)^2 + [\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}(x + y)]^2 + [\operatorname{tg}y - \operatorname{cotg}(x + y)]^2 = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{cotg}(x + y) \quad (3)$

• (3) và (1) $\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{cotg}(x + y) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Kết hợp (2)

$\Rightarrow$ *ĐS*: 2 nghiệm $\left\{\begin{matrix} \left(x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + \ell\pi\right), \\ \left(x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, y = -\dfrac{\pi}{6} + l\pi\right) \quad k, \ell \in Z \end{matrix}\right\}$

Bài 139. Phương trình

$$4\cos^2 x + 3\mathrm{tg}^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x + 4 = 0 \ (1)$$

có điều kiện là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \quad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + 3\left(\mathrm{tg}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{tg}x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z$$

Bài 140. Phương trình

$$1 + 3\mathrm{tg}x = 2\sin 2x \ (1)$$

có điều kiện là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \quad (2)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3 - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{3\sin x}{\cos x} = 4\sin x\cos x$

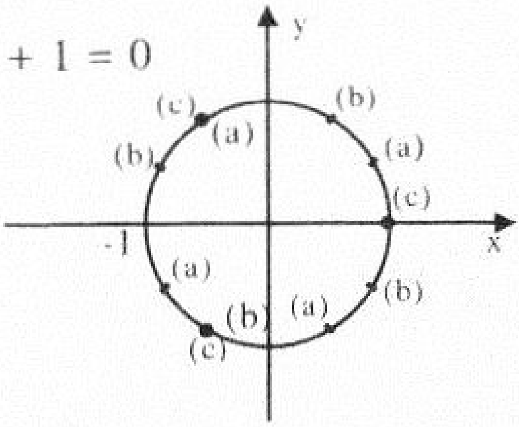
$$\Leftrightarrow \left(\frac{3\sin x}{\cos x} - 2\sin^2 x - \sin x\cos x\right) + \left(\frac{3\sin x}{\cos x} - 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\cos x} - 2\sin x - 2\cos x\right)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z \\ (1 - \sin 2x) + (1 - \cos 2x) = 0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Bài 141. Phương trình



$$8\cos4x\ .\ \cos^2(2x) + \sqrt{1-\cos3x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos4x(1+\cos4x) + \sqrt{1-\cos3x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos4x+1)^2 + \sqrt{1-\cos3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos4x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos3x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\\ x = k\dfrac{2\pi}{3}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}4x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\\ x = k\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} & (a)\\ x = k\dfrac{2\pi}{3} & (c)\end{cases} \quad \text{hoặc} \begin{cases}x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} & (b)\\ x = k\dfrac{2\pi}{3} & (c)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{\frac{2\pi}{3} + \ell2\pi, \frac{4\pi}{3} + \ell2\pi,\ \ell \in Z,\right\}$$

Bài 142. Phương trình

$$\cos^5x + \sin^5x + \cos2x + \sin2x = 1 + \sqrt{2} \qquad (1)$$

$$\text{có} \begin{cases}\cos^5x \le \cos^2x\\ \sin^5x \le \sin^2x\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\cos^5x + \sin^5x \le 1\\ \cos2x + \sin2x = \sqrt{2}.\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}\end{array}\right\}$$

Vế trái (1) $\le 1 + \sqrt{2}$ (2)

- (1) và (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos^5x + \sin^5x = 1\\ \cos2x + \sin2x = \sqrt{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x\left(1-\cos^3 x\right)+\sin^2 x\left(1-\sin^3 x\right)=0 \\ \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad \text{hoặc} \quad \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \quad \text{hoặc} \ \sin x = 1 \quad \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm} \\ x = \dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in Z \end{cases}$$

ĐS: (1) Vô nghiệm

Bài 143. Phương trình

$2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1 - \sin 10x) + 2(\sqrt{2} + \cos 28x\sin x - \cos x) = 0$ (2)

(2) có $|\cos(28x)\sin x - \cos x| \le |\cos 28x|.|\sin x| + |\cos x| \le$

$\le |\sin x| + |\cos x| \le \sqrt{2}$

$$\text{Vậy (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 10x = 1 \\ \cos 28x\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \\ |\cos 28x| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{(I)} \begin{cases} \sin 10x = 1 \\ \cos 28x = 1 \\ \sin x - \cos x = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{hoặc (II)} \begin{cases} \sin 10x = 1 \\ \cos 28x = -1 \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Dễ thấy hệ (I) vô nghiệm. Hệ (II) cho $x = \dfrac{\pi}{4} + \ell 2\pi,\ \ell \in Z$

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + \ell 2\pi,\ \ell \in Z$

Bài 144. Phương trình

$$\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2\left(1+\sin^2 2x\right) \qquad (1)$$

Có vế trái, theo BĐT B.C.S, $\le \sqrt{2}\,.\,\sqrt{\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x} = 2$

Vế phải; theo tính chất HSLG; ≥ 2 với $\forall$ x

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2 & (2) \\ 2\left(1+\sin^2 2x\right) = 2 \ \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

Thế (3) vào (2) $\Rightarrow \cos\left(3k.\dfrac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2-\cos^2\left(3k\dfrac{\pi}{2}\right)} = 2$

thỏa với $k = 4\ell$, $\ell \in Z$.

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \ell\, 2\pi$, $\ell \in Z$

Bài 145. Phương trình

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,(2 - \sin 3x) \qquad (1)$$

Có vế trái $\le \sqrt{2}$, còn vế phải $\ge \sqrt{2}$, với $\forall$ x.

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(2 - \sin 3x\right) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: Vô nghiệm

Bài 146. Phương trình

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x \ (1)$$

Có vế phải ≥ 4, còn vế trái $= 4\sin^2 x.\ \sin^3 3x \le 4$, $\forall x$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^2 x \sin^2 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ \ k \in Z$

Bài 147. Phương trình

$$\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x - 2\sin x\cos 2x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sin 2x - \sin x.\cos 2x = \sqrt{2}$ (1)

- Áp dụng BĐT B.C.S cho 2 bộ 2 số $\{-1, -\sin x\}$ và $\{\sin 2x , \cos 2x\}$

ta có VT (2) $\leq \sqrt{(1 + \sin^2 x)(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} \leq \sqrt{2}$

- Vậy ta có điều kiện cần để có (1) là $\sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$

$\Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow$ (1) không thỏa mãn

$\Rightarrow$ có điều kiện phải chứng minh.

Bài 148. Phương trình

$$\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x} \quad (1)$$

Có vế phải $= \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x}{4 - 3\sin^2 2x} = \dfrac{1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x}{4 - 3\sin^2 2x} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow (1) \quad \Leftrightarrow \sin^{10}x + \cos^{10}x = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^8 x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^8 x)$ (2)

VT (2) ≤ 0 và VP (2) $\geq 0\ \forall x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^8 x - 1) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^8 x) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$

Bài 149. Phương trình

$$\sqrt{3-\cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3-\cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\cos x + 1} = -(1 + \cos x)$ (1) có VT ≥ 0, VP $\leq 0 \Rightarrow$

(1) $\Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow$ *ĐS*: $x = (2k+1)\pi$, $k \in Z$

Bài 150. Phương trình :

$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$ (1) với $\forall x$

áp dụng BĐT B.C.S với vế trái có:

$\text{VT}(1) \leq \sqrt{2}.\sqrt{\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x} = 2$

còn vế phải ≥ 2. Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + \sin^2 2x) = 2 \\ \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2 - \cos 3x \end{cases} \Rightarrow \text{ĐS: } x = \ell\, 2\pi,\ \ell \in Z$$

Bài 151. Phương trình

$\text{tg}(120^0 + 3x) - \text{tg}(140^0 - x) = 2\sin(80^0 + 2x)$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}3(40^0 + x) + \text{tg}(40^0 + x) = 2\sin(40^0 + x) \qquad (1)$

Đặt $t = 40^0 + x \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \text{tg}3t - \text{tg}t = 2\sin 2t$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 4t}{\cos t.\cos 3t} = 2\sin 2t \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t.\cos 3t \neq 0 \\ \sin 4t = 2\sin 2t \cos t \cos s3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos t.\cos 3t \neq 0\\ \sin t.\sin 2t.\sin 3t = 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -40^0 + k180^0\\ x = -40^0 + k90^0\\ x = -40^0 + k60^0\end{array}\right. \quad k \in Z$$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $x = -40^0 + k60^0, k\in Z$

Bài 152. Phương trình

$$tg^2x = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|} \quad (1) \text{ có điều kiện là}$$

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ 1-\sin|x| \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \qquad (2)$$

khi đó đặt $t = |x| \Rightarrow t \geq 0,\ tg^2|x| = (tg|x|)^2 = (\pm tgx)^2 = tg^2x$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow tg^2x = \frac{1-\cos t}{1-\sin t} \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2 t} = \frac{1-\cos t}{1-\sin t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos t}{1-\sin t}\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\cos t}{1-\sin t}.\frac{\cos t - \sin t}{1+\sin t} = 0 \ (2)$$

Rõ ràng khi $1 - \cos t = 0$ hoặc $\cos t - \sin t = 0 \Rightarrow$

$1 - \sin t$ và $1 + \sin t$ luôn $\neq 0 \Rightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\cos t = 0\\ \cos t - \sin t = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = k2\pi\\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow \quad ĐS:\ x = \left\{m2\pi, \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ m, k \in Z\right\}$$

Bài 153.

Đặt $t = \sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} \Rightarrow$ với $\forall x$ có $|t| \leq 1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}$ và phương trình (1):

$$\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 = \sin x + \sqrt{2-\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \sin x = \sqrt{2-\sin^2 x} \quad \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \quad ĐS\!: \ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$$

Bài 154.

Xét hàm số: $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$f'(x) = n\sin x.\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x) = 0 \text{ với } x = \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Trên}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 0 < \sin x < \cos x < 1 \Rightarrow \cos^{n-2}x > \sin^{n-2}x \\ &\text{Trên}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \cos x < \sin x < 1 \Rightarrow \sin^{n-2}x > \cos^{n-2}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

có bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	$-$	0	$+$	0
f(x)	1	$\searrow$	$2^{\frac{2-n}{2}}$	$\nearrow$	1

Vậy $f(x) \geq 2^{\frac{2-n}{2}} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Dấu "=" khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4}$

Bài 155. Phương trình $2\log_3 \text{cotg}x = \log_2 \cos x$ (1)

có điều kiện là $\begin{cases} \cot gx > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ (2) khi đó

(1) $\Leftrightarrow \log_3 \text{cotg}^2 x = \log_2 \cos x = y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cot g^2 x = 3^y = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \dfrac{4^y}{1 - 4^y} \quad (3) \\ \cos x = 2^y \qquad (4) \end{cases}$$

Vậy (3) $\Leftrightarrow 3^y = \dfrac{4^y}{1 - 4^y} \Leftrightarrow 1 + 3^y = \left(\dfrac{3}{4}\right)^y$ (5)

Vế trái của (4) là hàm đồng biến, vế phải của (4) là hàm nghịch biến, giá trị y = -1 thỏa mãn (5).

Vậy y = -1 là nghiệm duy nhất của (5)

Thay vào (4) có *ĐS*: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z$

* *Bạn đọc có thể tham khảo câu II_2- Đề thi ĐHSPHN2-A-1999.*

CHỦ ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ THAM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN: Phương pháp thường sử dụng để giải quyết bài toán PTLG có tham số là:

1. Phương pháp trực tiếp:
2. Phương pháp tam thức bậc 2 (định lý thuận, đảo).
3. Phương pháp giải tích.
4. Phương pháp cần và đủ.

II. ĐỀ BÀI

§1. PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 156. Tìm các giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\text{Cos}^6x - m\cos^4x + \sin^6x - m\sin^4x = 1.$$

Bài 157. Tìm các giá trị tham số m để phương trình sau vô nghiệm.

$$m\cos 3x + \cos x = \sin x \,\text{tg}\, x - \frac{1}{\cos x}$$

Bài 158. Giải và biện luận phương trình sau:

$$2(a+1)\cos^3 x - 2a^2\sin^3 x - \\ -\sin 2x\left[\left(a^2+2a+2\right)\cos x - \left(2a^2+a+1\right)\sin x\right] = 0$$

Bài 159. Giải và biện luận phương trình:

$$\left(a^2+1\right)^2\cos^6 x + \frac{3}{2\cos^2 x} = 2(a\cos x + \sin x)$$

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI VÀO TRƯỜNG CĐ- ĐH NĂM 2000 VÀ 2001

Bài 160. Cho phương trình

$$(1-a)\mathrm{tg}^2x-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0 \qquad (1)$$

1. Giải phương trình khi $a=\frac{1}{2}$

2. Tìm a để phương trình (1) có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

(Câu II - Đề 5)

Bài 161. Xác định a để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a|\sin 2x|$$

(Câu II_1 - Đề 11)

Bài 162. Tìm các giá trị m để phương trình

$$m\cos 3x+(4-8m)\sin^2 x+(7m-4)\cos x+(8m-4)=0 \qquad (1)$$

tương đương với phương trình:

$$3\cos x+\cos 2x-\cos 3x+1=2x\mathrm{in}\,x\sin 2x \qquad (2)$$

(Câu II_2 - Đề 40)

Bài 163. Cho phương trình

$$(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+m)=3-4\cos^2 x$$

1. Giải phương trình khi m = 1.

2. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thoả mãn điều kiện $0\le x\le\pi$.

(Câu II - Đề 89)

Bài 164. Giải và biện luận theo tham số a, phương trình:

$$\frac{a^2}{1-\mathrm{tg}^2x}=\frac{\sin^2 x+a^2-2}{\cos 2x}$$

(Câu II_2 - Đề 124)

Bài 165. Với giá trị a là bao nhiêu thì phương trình

$1+\sin^2(ax)=\cos x$ có nghiệm duy nhất

(Câu II_2 - ĐHGTVT - HN - 2000)

Bài 166. Tìm m để phương trình:

$\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x$ có đúng 2 nghiệm $\in\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$

(Câu 6 - ĐH Xây dựng Hà Nội - 2001)

Bài 167. Giải và biện luận tham số m: Phương trình:

$$2m(\cos x+\sin x)=2m^2+\cos x-\sin x+\frac{3}{2}$$

(Câu III_1 - ĐH Kiến trúc Hà Nội - 2001)

Bài 168. Xét phương trình:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=m \qquad (1)$$

1. Xác định m để phương trình (1) có nghiệm.
2. Giải phương trình đó khi $m=\dfrac{3}{4}$

(Câu IV - ĐHDL Thăng Long - 2001)

§ 2 - PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC 2

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 169. Tìm m để phương trình

$\dfrac{m^2}{\cos^2 x}+m^2\cot g^2 x+m(\operatorname{tg} x+\cot g x)+m^2+1=0$ có nghiệm

Bài 170. Tìm m để phương trình

$$(1-m)\operatorname{tg}^3 x+\frac{3m-1}{\cos^2 x}-(2m+1)\operatorname{tg} x-3m+2=0$$

có nghiệm duy nhất trên $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI VÀO TRƯỜNG CĐ-ĐH NĂM 2000 VÀ 2001.

Bài 171. Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$ và c là số bất kỳ. Chứng minh rằng trong 2 phương trình sau:

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad (1)$$

$$a\cot g\, x + b\,tgx = c\sqrt{2} \qquad (2)$$

ít nhất có một phương trình có nghiệm.

(Câu II_2 - Đề 85)

Bài 172. Cho phương trình

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Xác định m để (1) có đúng 7 nghiệm khác nhau trong $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

(Câu II_2 - Đề 82)

Bài 173. Tìm m để phương trình

$\sin 3x - m\cos 2x - (m + 1)\sin x + m = 0$ có đúng 8 nghiệm thuộc $(0; 3\pi)$.

(Câu III_2 - ĐHSP TP.HCM - A và B - 2000)

Bài 174. Cho phương trình

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m \qquad (1)$$

1. Giải (1) khi m - 4.
2. Xác định m để (1) có nghiệm.

(Câu II - ĐH Thái Nguyên - D -2000)

Bài 175. Cho phương trình

$$\cos^2 x - \sin x\cos x - 2\sin^2 x - m = 0 \qquad (1)$$

1. Giải phương trình (1) khi m = 1
2. Giải và biện luận (1) theo m

(Câu III - ĐH Thủy sản - 2000)

Bài 176. Cho phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x = m\sin 2x - \frac{1}{2} \qquad (1)$$

1. Giải phương trình (1) khi m = -1.

2. Chứng minh rằng với mọi m thoả mãn điều kiện $|m| \geq 1$ phương trình (1) luôn có nghiệm.

(Câu II - ĐH Huế - A+ B -2001)

§3 - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

A - MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 177. Tìm m để phương trình:

$2 + 2\sin 2x = m(1 + \cos x)^2$ có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 178. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\mathrm{Cos}6x + 4\cos 4x + 7\cos 2x + 8 - 4m = 0$$

Bài 179. Chứng minh rằng với $\forall\, m \in R$, phương trình

$\cos^2 x - x = mx$ luôn luôn có duy nhất nghiệm.

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG ĐH - CĐ NĂM 2000 VÀ 2001

Bài 180. Với những giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{3}{\sin^2 x} + 3\mathrm{tg}^2 x + m(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x) - 1 = 0$$

(Câu III_1 - Đề13)

Bài 181. Giải và biện luận theo m phương trình:

$$(m-1)\sin^2 x - 2(m+1)\cos x + 2m - 1 = 0$$

(Câu *III - Đề 95)*

***Bài 182**. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \neq k\pi, k \in z$.*

$$\sin 4x = m\text{tg}x \qquad (1)$$

(Câu II_2 - Đề 96)

Bài 183. Cho phương trình:

$$\begin{aligned}(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x \\ + 2(m-2)\sin^2 x.\cos x - (4m-3)\cos x = 0\end{aligned} \qquad (1)$$

1. Giải phương trình (1) khi m = 2

2. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

***(Câu** III - Đề 114)*

Bài 184. Cho phương trình

$$\cos^3 x - \sin^3 x = m \qquad (1)$$

1. Giải phương trình (1) khi m = 1.

2. Tìm m để (1) có đúng 2 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

(Câu II - ĐHQG TP.HCM - A - 2000)

Bài 185. Cho phương trình:

$$\cos 2x = m\left(\cos^2 x.\sqrt{1+\text{tg}\,x}\right) \qquad (1)$$

1. Giải phương trình (1) khi m = 1.

2. Tìm m để (1) có đúng 2 nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

(Câu III - HVKTQS - 2000)

Bài 186. Cho phương trình

$$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = m(\sin x + \cos x) \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi m = 2.

2. Tìm m để phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(Câu II - ĐHSP và ĐH Luật TP.HCM - A - 2001)

Bài 187. Cho các hàm số

$$f(x) = (2xin\, x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$$

$$g(x) = \frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x + \cos x} + \frac{2\sin x - \cos x}{2\cos x - \sin x}$$

Xác định giá trị tham m để phương trình sau nghiệm.

$$(m - 3)g(x) = 3[f(x) - m]$$

(Câu IV$_2$ - ĐH Cần thơ - A - 2001)

§ 4. PHƯƠNG PHÁP CẦN VÀ ĐỦ

A MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 188. Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất trên

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$ax^2 + \cos x + a - 1 = 0$ (1).

Bài 189. Tìm m để phương trình sau đúng với $\forall\, x \in R$.

$$m\sin x + \cos m\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \qquad (1)$$

Bài 190. Tìm a để 2 phương trình sau tương đương với nhau.

$\sin 2x + 3\cos x - 2\sin x - 3 = 0$ (1)

$\cos^3 x + 4\cos^2 x + (a + 1)\cos x - 7 = 0$ (2)

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI VÀO TRƯỜNG CĐ+ ĐH NĂM 2000 VÀ 2001

Bài 191. Xác định a để 2 phương trình sau là tương đương với nhau:

$$2\cos x \,.\, \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \qquad (1)$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) \qquad (2)$$

(Câu II_2 - Đề 10)

Bài 192. Tìm a và b để 2 phương trình sau tương đương:

$$a\sin 2x + \sqrt{2} = 2\cos x + a\sqrt{2}\sin x \qquad (1)$$

$$2\sin^2 x + \cos 2x + \sin 2x + b = 2b\sin x + \cos x + 1 \qquad (2)$$

(Câu II_2 - Đề 117)

Bài 193.

1. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x = 1 + \sin x \,.\, \cos 2x$ (1)
2. Tìm m để phương trình (1) tương đương với phương trình

$$\sin 3x - m\sin x = (4 - 2\,|m|)\sin^2 x \qquad (2)$$

(Câu II - ĐH Thái Nguyên - A + B - 2000)

Bài 194.

Cho phương trình $3\cos^2 x + 2|\sin x| = m$ (1)

1. Giải phương trình (1) khi m = 2.
2. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

(Câu II - ĐH Thái Nguyên - G - 2000)

III - HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 156. Phương trình

$$\cos^6 x - m\cos^4 x + \sin^6 x - m\sin^4 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^6 x + \sin^6 x = 1 + m\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\sin^2 2x = m\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-m}{4}\sin^2 2x = -m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-m}{8}\left(1 - \cos 4x\right) = -m \Leftrightarrow (m-6)\cos 4x = 7m + 6.$$

* $m = 6$ không thoả mãn (1)

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{7m+6}{m-6}$$

* Để phương trình đã cho có nghiệm cần và đủ là:

$$\left|\frac{7m+6}{m-6}\right| \le 1 \Leftrightarrow (7m+6)^2 \le (m-6)^2 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$$

ĐS: $-2 \le m \le 0$

Bài 157. Phương trình:

$$m\cos 3x + \cos x = \sin x.\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{\cos x} \qquad (1)$$

Có điều kiện là: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ (2)

* Khi đó (1)

$$\Leftrightarrow m\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = -1$$

$\Leftrightarrow 4m\cos^4 x - 3m\cos^2 x + 2\cos^2 x = 0$. Vì (2) $\Rightarrow$

(1) $\Leftrightarrow 4m\cos^2 x = 3m - 2$ (3) Do $m = 0$ không thoả mãn (3)

$$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow 2\cos^2 x = \frac{3m-2}{2m} \Leftrightarrow 1+\cos 2x = \frac{3m-2}{2m}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{m-2}{2m} \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $|m-2| > |2m| \Rightarrow$ ĐS : $-2 < m < \frac{2}{3}$

Bài 158. Phương trình:

$$2(a+1)\cos^3 x - 2a^2\sin^3 x$$
$$-\sin 2x[(a^2+2a+2)\cos x - (2a^2+a+1)\sin x = 0]$$

$$\Leftrightarrow (a+1)\cos^3 x - a^2\sin^3 x$$
$$-(a^2+2a+2)\cos^2 \sin x + s(2a^2+a+1)\sin^2 x.\cos x = 0 \quad (1)$$

a. Trường hợp 1: a + 1 = 0 ⇔ a = -1 ⇔ (1) trở thành:

$$\sin^3 x + \cos^2 x\sin x - 2\sin^2 x.\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in z\right\}$$

b. Trường hợp 2: a ≠ -1; Khi đó, Vì sin x = 0 không thoả mãn (1).

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (a+1)\cot g^3 x - (a^2+2a+2)\cot g^2 x + (2a^2+a+1)\cot g\, x - a^2 = 0 \quad (2)$$

* Pt (2) có tổng các hệ số = 0 ⇒

$$(2) \Leftrightarrow (\cot g\, x - 1)[(a+1)\cot g^2 x - (a^2+a+1)\cot g\, x + a^2] = 0\ (3)$$

* Tam thức trong móc vuông có tổng các hệ số = 0 ⇒

$$(3)\ (\cot g\, x - 1)^2[(a+1)\cot g\, x - a^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot g\, x = 1 \\ \cot g\, x = \dfrac{a^2}{a+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in z$$

* Kết hợp 2 trường hợp ⇒ ĐS:

$$* \quad a = -1 \Rightarrow x = \left\{k\pi, \frac{\pi}{4}, k\pi \in z\right\}$$

$$* \quad a \neq -1 \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \alpha + k\pi, k \in z, \cot g\, \alpha = \frac{a^2}{a+1}\right\}$$

Bài 159. Phương trình

$$\left(a^2+1\right)^2 \cos^6 x + \frac{3}{2\cos^2 x} = 2(a\cos x + \sin x) \qquad (1)$$

Có điều kiện là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in z$ (2)

* Khi đó; theo BĐT B.C. S $\Rightarrow VT(1) \le 2\sqrt{a^2+1}$,

Theo BĐT Côsi

$$\Rightarrow VP(1) = \left(a^2+1\right)^2 \cos 6x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^2 x}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\left(a^2+1\right)^2 \frac{1}{16}} = 2\sqrt{a^2+1}$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a^2+1\right)^2 \cos^6 x + \dfrac{3}{2\cos^2 x} = 2\sqrt{a^2+1} & (a) \\ (a\cos x + \sin x) = \sqrt{a^2+1} & (b) \end{cases} \qquad (4)$$

* Nếu a = 0 ⇒ Hệ (a), (b) trở thành:

$$\begin{cases} \cos^6 x + \dfrac{2}{\cos^2 x} = 2 \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ \text{ không thỏa mãn } (2) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

* Nếu $a \neq 0$, Hệ (a), (b), theo các BĐT côsi và B. C. S. Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos x}{a} = \sin x \\ (a^2+1)^2 \cos^6 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{4\cos^2 x} \quad \text{vô nghiệm} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm. *ĐS*: Vô nghiệm với $\forall$ a.

Bài 160. Phương trình

$$(1-a)tg^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0 \qquad (1)$$

có điều kiện là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ (2)

* Khi đó đặt $t = \dfrac{1}{\cos x}, t \in R \Rightarrow (1)$ trở thành

$$(1-a)t^2 - 2t + 4a = 0 \qquad (3)$$

1. Giải phương trình khi $a = \dfrac{1}{2}$. Khi đó (3) trở thành:

$t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow$ Kết hợp (2) ta có.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

2. Tìm a: Với $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (1, +\infty) \Rightarrow$ Số nghiệm của (1) trong $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nhiều hơn một nghiệm, khi và chỉ khi số nghiệm của (2) nhiều hơn một nghiệm trong $(1, +\infty)$

* Nếu $a = 1 \Rightarrow (3)$ cho $t = 2 \Rightarrow$ Không thoả mãn yêu cầu bài.

* Nếu $a \neq 1 \Rightarrow$ (3) cho $t = \left\{2, \frac{-2a}{a-1}\right\} \Rightarrow$ để thoả mãn yêu cầu bài toán cần và đủ là:

$$\begin{cases} \frac{-2a}{a-1} > 1 \\ \frac{-2a}{a-1} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow ĐS: a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Bài 161. Phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x|$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a|\sin 2x|$ (1). Đặt $t = |\sin 2x| \Rightarrow 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}t^2 = at$ (2) vì t = 0 không thoả mãn (2) $\Rightarrow$

(2) $\Leftrightarrow a = \frac{1}{t} - \frac{3}{4}t = \frac{1}{t} + t - \frac{7}{4}t$ với $t \in (0,1]$ (3) $\Rightarrow$

Theo BĐT Cô-si, ta có: $a \ge 2 - \frac{7}{4}t \ge \frac{1}{4}$

Dấu " = " khi và chỉ khi $\frac{1}{t} = t \Leftrightarrow t = 1$ thoả mãn (3).

ĐS: $a \ge \frac{1}{4}$

Bài 162. Tìm nghiệm của phương trình:

$m\cos 3x + (4 - 8m)\sin^2 x + (7m - 4)\cos x + (8m - 4) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow$ $4m\cos^3 x - (4 - 8m)\cos^2 x + (4m - 4)\cos x = 0.$

$\Leftrightarrow$ $\cos x[m\cos^2 x - (1 - 2m)\cos x + (m - 1)] = 0$ (3)

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow$ (3) trở thành $\cos x(\cos x + 1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. (a)$$

+ Nếu m ≠ 0 ⇒ (3) có $\cos x = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -1 \\ \dfrac{1-m}{m} \end{array}\right.$ (b)

* Tìm nghiệm của phương trình

$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \sin 2x$ (2)

$$\Leftrightarrow 3\cos x + 2\cos^2 x - \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) =$$
$$= 4\sin^2 x \cos x = 4\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \quad (c)$$

* (a), (b) và (c) ⇒ (1) và (2) tương đương nhau khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{1-m}{m}\right| > 1 \\ \dfrac{1-m}{m} = 0 \Leftrightarrow m = 1 \\ \dfrac{1-m}{m} = -1 \Rightarrow \text{vô nghiệm} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \text{ĐS: } m \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$$

Bài 163. Phương trình

$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 4\sin^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + m - 1) = 0 \quad (1)$$

1) Khi m = 1 ⇒ Trở thành $(2\sin x - 1)\, 2\cos 2x = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$$

2) Tìm m để (1) có đúng 2 nghiệm $\in [0, \pi]$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\} \in [0, \pi] \\ \cos 2x = \dfrac{1-m}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{1-m}{2}\right| > 1 \\ \cos 2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-m}{2} \\ \cos 2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-m}{2} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS:* $m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (3, +\infty)$

Bài 164. Phương trình

$$\frac{a^2}{1 - tg^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x} \qquad (1)$$

có điều kiện là $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ tg^2 x \neq 1 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \neq \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\} \qquad (2)$$

* Khi đó đặt $t = tg^2 x$, $t \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a^2}{1-t} = \frac{\dfrac{t}{1+t} + a^2 - 2}{\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t}} \Leftrightarrow (a^2 - 1)t = 2 \qquad (3). \text{ Vậy}$$

+ Nếu $a^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow |a| \le 1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

+ Nếu $a^1 - 1 > 0 \Leftrightarrow |a| > 1 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow \begin{cases} t = tg^2 x = \dfrac{2}{a^2 - 1} \\ t \ne 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg\, x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{a^2 - 1}} \\ a \ne \pm\sqrt{3} \end{cases} \qquad (4)$$

* Kết hợp (2), (4) ⇒ *ĐS:*

$|a| \le 1$ hoặc $a = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Vô nghiệm.

$1 < |a| \ne \sqrt{3} \Rightarrow$ Nghiệm là $x = \pm\alpha + k\pi,\ k \in Z$, $tg\,\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{2}{a^2 - 1}}$

Bài 165. Phương trình

$$1 + \sin^2(ax) = \cos x \qquad (1)$$

Có vế trái ≥ 1, vế phải ≤ 1 với $\forall$ a, x ⇒

$$(1) \Leftrightarrow (H) \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin ax = 0 \end{cases}$$

* Nếu $a = 0 \Rightarrow (H) \Rightarrow (1)$ có vô số nghiệm dạng $x = k2\pi,\ k \in Z$.

$\Rightarrow a = 0$ không thoả mãn bài.

* Nếu $a \ne 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi, k \in Z \\ \sin(a.k2\pi) = 0 \Leftrightarrow a.k2\pi = l\pi, l \in Z \end{cases}$

Vậy (1) không thể có nghiệm duy nhất nếu tồn tại $0 \ne k \in Z$ để $a = \dfrac{1}{2k}$ tức là số hữu tỉ.

Ngược lại nếu a là số hữu tỉ dạng $\frac{m}{n}$, m , n $\in$ Z, n $\neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(ax) = \sin\left(\frac{m}{n}x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in Z \\ \sin\left(\frac{m}{n}k2\pi\right) = 0 \text{ ứng với } k = n \end{cases}$$

Vậy (1) không có nghiệm duy nhất

ĐS: a là số vô tỉ thì (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 166. Phương trình

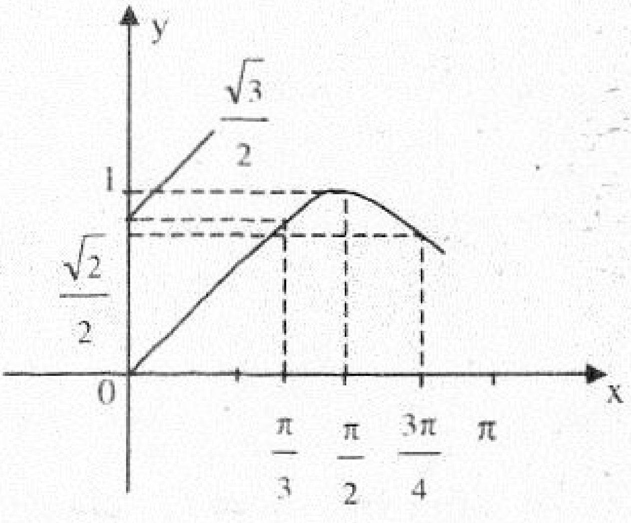
$$\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2x\text{in } x \cos x - \sin x - 2m\cos x + m = 0.$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = \frac{1}{2} & (1) \\ \sin x = m & (2) \end{array}\right.$$

Với $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ (3)



* Vì (1) đã có một nghiệm

$$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow$$

để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $\in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ thì phương trình (2) phải

+ Hoặc có đúng 1 nghiệm $\frac{\pi}{3} \neq x_0 \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = m = 1 \end{array}\right.$$

+ Hoặc có đúng 2 nghiệm $\in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ mà một nghiệm $= \dfrac{\pi}{3}$, còn nghiệm hoặc $\neq \dfrac{\pi}{3}$, nhưng $\in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow \sin x = m = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ĐS: $m \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Bài 167. Phương trình:

$$2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)\cos x + (2m+1)\sin x = \frac{4m^2+3}{2} \qquad (2)$$

* (2) có nghiệm $\Leftrightarrow (2m-1)^2 + (2m+1)^2 \ge \left(\dfrac{4m^2+3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$(4m^2 - 1)^2 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm\frac{1}{2}$$

* Với $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (2) cho $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

* Với $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (2) cho $\cos x = -1$

$$\Leftrightarrow x = (2k+1)\pi, k \in Z$$

ĐS: * $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

$* \ m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \ x = (2k+1)\pi, k \in Z$

$* \ m \neq \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Vô nghiệm.

Bài 168. Phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x = m \quad (1) \Leftrightarrow \sin^2 2x = 2 - 2m \qquad (2)$$

1. Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 - 2m \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 1$$

2. Khi $m = \dfrac{3}{4} \Rightarrow (2)$ cho $\sin^2 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in Z$$

Bài 169. Phương trình

$$\frac{m^2}{\cos^2 x} + m^2 \cot g^2 x + m(\operatorname{tg} x + \cot g\, x) + m^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

Có điều kiện là $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$ (2)

* Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ m^2(\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x) + m(\operatorname{tg} x + \cot g\, x) + 2m^2 - 1 = 0$ (3)

* Đặt $t = \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x \Rightarrow |t| \geq 2$ (BĐT Côsi)

và $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 = t^2 - 2$

$(3) \Leftrightarrow f(t) m^2 t^2 + mt - 1 = 0$ (4). với $|t| \geq 2$

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ Vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0 \Rightarrow (1)$ Có nghiệm $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm trên tập $|t| \geq 2$. Để đơn giản, ta đi chứng minh (4) vô nghiệm trên

$|t| \geq 2$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi (4) có nghiệm thoả mãn

$$-2 < t_1 \leq t_2 < 2 \qquad (5)$$

(Chú ý: $\dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{m^2}$ nên (4) luôn có nghiệm $t_1 \leq t_2$)

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) > 0 \\ f(-2) > 0 \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 2m - 1 > 0 \\ 4m^2 - 2m - 1 > 0 \\ -2 < -\dfrac{1}{2m} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{5} \text{ hoặc } m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ m < \dfrac{1-\sqrt{5}}{5} \text{ hoặc } m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ \dfrac{1+4m}{2m} > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{4} \text{ hoặc } m > 0 \\ \dfrac{1-4m}{2m} < 0 \Leftrightarrow m < 0 \quad \text{ hoặc } m > \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ hoặc $m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Kết hợp (2)

$\Rightarrow$ *ĐS:* Phương trình có nghiệm khi $0 \neq |m| \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Bài 170. Với $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, Phương trình:

$$(1-m)tg^3x + \frac{3m-1}{\cos^2 x} - (2m+1)tg\,x - 3m + 2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (1-m)tg^3x + (3m-1)(1 + tg^2x) - (2m+1)tg\,x - 3m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m)tg^3x + (3m-1)tg^2x - (2m+1)tg\,x + 1 = 0 \qquad (2)$$

* Đặt $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow 0 \le t \le 1$ và (2) trở thành

$$(1-m)t^3 + (3m-1)t^2 - (2m+1)t + 1 = 0 \qquad (3)$$

Có tổng các hệ số = 0 ⇒

$$(3) \Leftrightarrow (t-1)\left[(1-m)t^2 + 2mt - 1\right] = 0 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ f(t) = (1-m)t^2 + 2mt - 1 = 0 \end{array}\right.$$

* Trường hợp 1 - Nếu $m = 1 \Rightarrow f(t) = 2t - 1 = 0$ $\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (4) có 2 nghiệm phân biệt $\in [0,1] \Rightarrow$ (1) có quá một nghiệm $\in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow$ loại.

* Trường hợp 2 - Nếu $m \ne 1 \Rightarrow f(t)$ có $\Delta' = m^2 + (1-m) > 0$ $\forall m \Rightarrow f(t) = 0$ luôn có 2 nghiệm $t_1 < t_2$

Khi đó (1) có nghiệm duy nhất $\in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

⇔ (4) có nghiệm duy nhất t = 1. Điều đó tương đương với một trong các trường hợp sau:

a) $f(t) = 0$ có 2 nghiệm thoả mãn : $t_1 < t_2 < 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (1-m)f(0) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ m - 1 > 0 \\ \dfrac{m}{m-1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Vô nghiệm}$$

b) f(t) = 0 có 2 nghiệm thoả mãn: $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (1-m)f(1) < 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ (m-1)m > 0 \\ \dfrac{1}{m-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Vô nghiệm}$$

c) f(t) = 0 có 2 nghiệm thoả mãn $t_1 < 0 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)f(0) < 0 \\ (1-m)f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ (1-m)m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

ĐS: $m < 0$

Bài 171. Với $c \neq 0$, ta có:

* Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow$ Đó là điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm ⇒ có điều phải chứng minh.

* Nếu $a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow$ (1): acosx + bsinx = c Vô nghiệm.

Xét (2): $a\cot g\, x + b\, tg\, x = c\sqrt{2}$ thì:

+ $a = 0$ và $b \neq 0 \Rightarrow$ (2) cho $tg\, x = \dfrac{c\sqrt{2}}{b}$ có nghiệm.

+ $a \neq 0$, $\forall b \Rightarrow$ (2) cho $a\cot g^2 x - c\sqrt{2}\cot g\, x + b = 0$

có $\Delta = 2(c^2 - 2ab) > 0$, Vì $c^2 > a^2 + b^2 \geq 2ab$. Vậy (2) có nghiệm.

Vậy nếu $a^2 + b^2 \neq 0$ và c bất kỳ thì ít nhất (1) hoặc (2) có nghiệm.

Bài 172. Phương trình:

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - (2\cos^2 x - 1) + m\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2\cos^2 x + (m-3)\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0 & (1) \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

* Trong $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$, Phương trình cos x = 0 cho 2 nghiệm $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{3\pi}{2}$ Vậy cần tìm m để phương trình

$$4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0 \qquad (2)$$

Có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ và khác $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

* Đặt $t = \cos x \Rightarrow -1 \le t \le 1 \Rightarrow$ (2) trở thành

$f(t) = 4t^2 - 2t + m - 3 = 0$ (3)

Vì $\cos x = \alpha$ với $0 < \alpha < 1$ sẽ có đúng 3 nghiệm $\in \left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$

Đó là $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < -x_0 < 0$ và $-x_0 + 2\pi$ (Với $k = 1$)

Còn $\cos x = \beta$ với $-1 < \beta < 0$ sẽ có đúng 2 nghiệm $\in \left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ đó là $\frac{\pi}{2} < x'_0 < \pi$ Và $\pi < -x'_0 < \frac{3\pi}{2}$

Vậy cần tìm m để (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn:

$$-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)<0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ m+3>0 \\ m-1>0 \end{cases} \Rightarrow \textit{ĐS: } 1 < m < 3.$$

* Chú ý không xét đến $\alpha = 1$ hoặc $\beta = -1$ Vì lúc đó cos x chỉ cho 1 nghiệm 2π hoặc $\pi \Rightarrow$ không đủ 6 nghiệm.

Bài 173. Phương trình:

$$\sin 3x - m\cos 2x - (m+1)\sin x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2m\sin^2 x + (m-2)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ \begin{cases} t = \sin x, |t| \le 1 \\ f(t) = 4t^2 - 2mt + (m-2) = 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Tương tự bài 172 , II_2 - Đề 82:

* Phương trình sin x = 0 có nghiệm $\{\pi, 2\pi\} \in (0, 3\pi) \Rightarrow$ cần tìm m để (2) có 6 nghiệm $\in (0, 3\pi)$ và các nghiệm đó $\ne \{\pi, 2\pi\}$

* Vì + $\sin x = \alpha$ với $0 < \alpha < 1$ cho ta 4 nghiệm $\in (0, 3\pi)$, đó là :

$$0 < x_0 < \frac{\pi}{2}, 0 < x_0 + 2\pi < 3\pi \,; \frac{\pi}{2} < \pi - x_0 < \pi, 2\pi < (\pi - x_0) + 2\pi < 3\pi$$

$\sin x = \beta$ với $-1 < \beta < 0$ cho ta 2 nghiệm $\in (0, 3\pi)$, đó là

$$x_0' = x^* + 2\pi \text{ và } x_0'' = \pi - x_0' \text{ với } \sin x^* = \beta \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x^* < 0$$

$\sin x = 1$ cho ta 2 nghiệm $\in (0, 3\pi)$

đó là $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{5\pi}{2}$

$\sin x = -1$ cho ta 1 nghiệm $\in (0, 3\pi)$ đó là $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ loại

Vậy yêu cầu của bài thoả mãn khi và chỉ khi (1) có nghiệm t_1, t_2 sao cho $\left[\begin{array}{ll} 0 < t_1 < 1 = t_2 & (3) \\ -1 < t_1 < 0 < t_2 < 1 & (4) \end{array}\right.$

$$+ (3) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ 0 < P = t_1 t_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2m + m - 2 = m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \\ 0 < \dfrac{m-2}{4} < 1 \Rightarrow 0 < -1 < 1 \text{ không thoả} \end{cases}$$

$$+ (4) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow ĐS:\ -\frac{2}{3} < m < 2$$

Bài 174. Phương trình

$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$ (1)

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 - 4(\cos x - \sin x) + m - 1 = 0$ (2)

1. Khi $m = 4 \Rightarrow$ (2) cho $\left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 1 \\ \cos x - \sin x = 3 \text{ vô nghiệm} \end{array}\right.$

$\Rightarrow ĐS:\ x = \left\{k2\pi, -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z\right\}$

2) Tìm m để (1) có nghiệm.

Đặt $t = \cos x - \sin x \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ (2) trở thành $f(t) = t^2 - 4t + m - 1 = 0$ (3)

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ |t| = \left|2 - \sqrt{\Delta'}\right| \le \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow ĐS:\ -1 - 4\sqrt{2} \le m \le -1 + 4\sqrt{2}$$

Bài 175.

1) Khi m = 1 phương trình

$\cos^2 - \sin x \cos x - 2\sin^2 x - m = 0$ (1)

trở thành: $\sin x\,(3\sin x + \cos x) = 0 \Rightarrow$

ĐS: $x = \{k\pi, \alpha + k\pi, k \in Z, \cot g\,\alpha = 3\}$

2) Giải và biện luận (1)

$$* \text{ Nếu } \cos x = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \\ \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = -\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m = -2 \end{cases}$$

Vậy m = -2 ⇒ (1) có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ (a)

* Nếu $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \Rightarrow$

$(1) \Leftrightarrow (m + 2)\,tg^2x + tg\,x + m - 1 = 0$ (2)

⇒ (1) vô nghiệm ⇔ (2) có nghiệm ⇔ $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{10}}{2} \leq m \leq \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$ (b)

* (a) và (b) ⇒ *ĐS:* * $m = -2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

* $\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2} \leq m \leq \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$ và $m \neq -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \beta + k\pi, k \in Z, tg\,\beta = \dfrac{-1+\sqrt{\Delta}}{2(m+2)} \\ \gamma + k\pi, k \in Z, tg\,\gamma = \dfrac{-1-\sqrt{\Delta}}{2(m+2)} \end{cases}$$

* $m < \dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}$ hoặc $m > \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm

Bài 176: Phương trình

$\sin^4 x + \cos^4 x = m\sin 2x - \dfrac{1}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2m\sin 2x - 3 = 0$ (2)

1) Khi m = 1 ⇒ (2) trở thành: $\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow ĐS:\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

2) Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow |t| \le 1 \Rightarrow (1)$ có nghiệm ⇔

⇔ phương trình $f(t) = t^2 + 2mt - 3 = 0$ (3) có ít nhất một nghiệm $\in [-1; 1]$ (4)

* Vì Pt (3) có $\frac{c}{a} = -3 \Rightarrow (3)$ chắc chắn có 2 nghiệm trái dấu cùng với (4) thì (3) phải có 1 nghiệm có trị số tuyệt đối > 1

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le t_1 < 0 < t_2 \\ t_1 < -1 < 0 < t_2 \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(1).f(-1) \le 0 \Leftrightarrow -4(m^2 - 1) \le 0 \Rightarrow$$

ĐS: $|m| \ge 1 \Rightarrow (1)$ có nghiệm.

Bài 177.

* Nếu $(1 + \cos x) = 0 \Rightarrow$ Vế trái của phương trình đã cho:

$2 + 2\sin 2x = m(1 + \cos x)^2$ (1)

sẽ $= 2 \Rightarrow$ (1) Vô lý.

* Vậy $(1) \Leftrightarrow 2\frac{1 + \sin 2x}{(1 + \cos x)^2} = m$ (2)

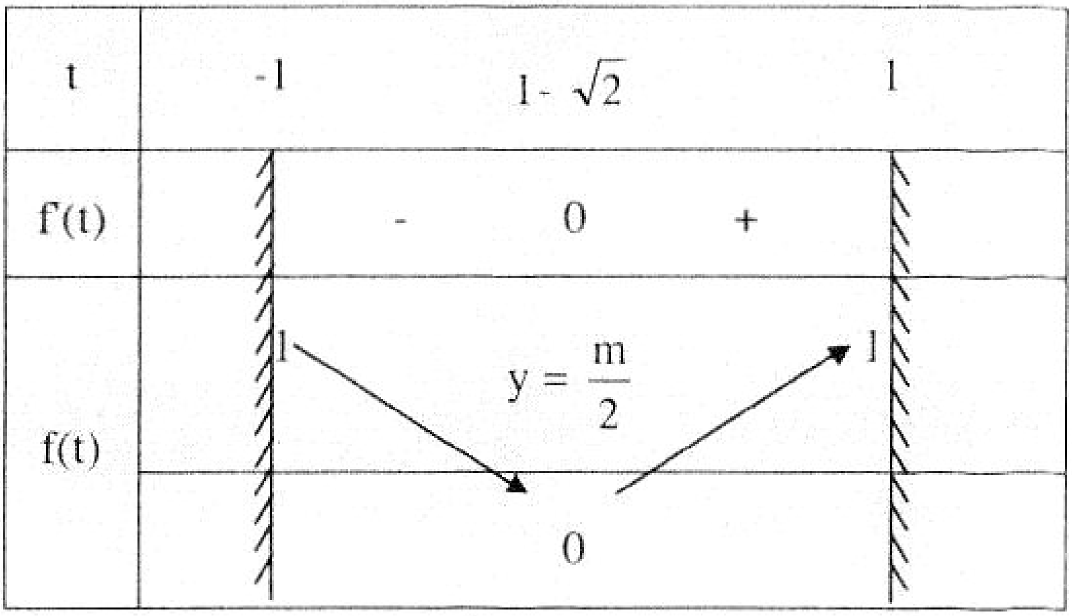
* Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, Chú ý $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow$

(2) trở thành $\frac{m}{2} = f(t) = t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1$ (3)

Với $|t| \le 1$ (4)

Ta có $f'(t) = (t - 1)(t^2 - 2t - 1)$

⇒ Có bảng biến thiên:


t
-1
1- $\sqrt{2}$
1
f'(t)
-
0
+
f(t)
1
$y = \frac{m}{2}$
1
0

Vậy *ĐS:* $0 \le m \le 2$

Bài 178. Phương trình

$$\cos 6x + 4\cos 4x + 7\cos 2x + 8 - 4m = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\cos 6x + 3\cos 2x) + (1 + \cos 4x) + \cos 2x + 1 - m = 0$$

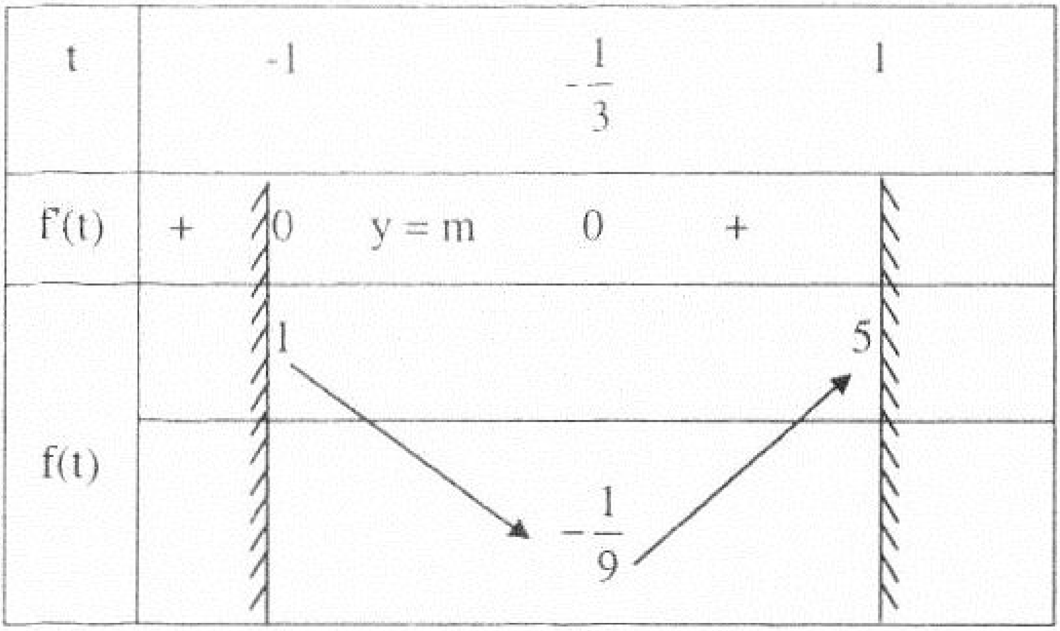
$$\Leftrightarrow \cos^3 2x + 2\cos^2 \cos^2 2x + \cos 2x + 1 - m = 0 \qquad (2)$$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow |t| \le 1$ và (2) trở thành:

$m = f(t) = t^3 + 2t^2 + t + 1$ (3) với $\Rightarrow |t| \le 1$ (4)

$f'(t) = 3t^2 + 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \left\{-1; \frac{-1}{3}\right\} \Rightarrow$ có bảng biến thiên

Bảng biến thiên



(1) có nghiệm ⇔ (3) có nghiệm trên $[-1;1] \Rightarrow$ căn cứ bảng biến thiên

có *ĐS:* $-\frac{1}{9} \le m \le 5$

Bài 179. Với phương trình đã cho $\cos^2 x - x = mx$ (1)

- Xét vế trái: $f(x) = \cos^2 - x \Rightarrow$

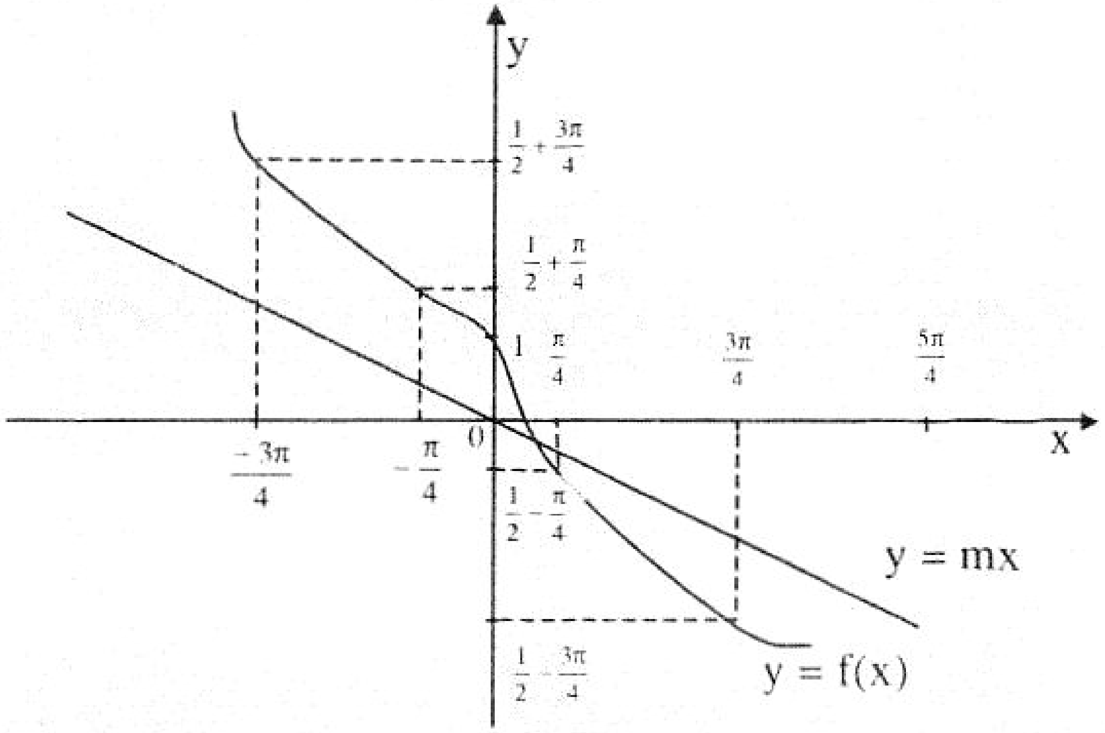
$\Rightarrow f'(t) = -\sin 2x - 1 = -(1 + \sin 2x) \le 0, \forall x$

$f''(x) = -2\cos 2x$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}(\cos^2 - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x\left(\frac{\cos^2 x}{x} - 1\right) = \pm\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	…	$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	…	$+\infty$
f'(x)			—						—		
f''(x)		…	0	+	0	-	0	+	0	…	
f(x)	$+\infty$	…	$\left(\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)$		$\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	1	$\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$		$\left(\frac{1}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)$		$-\infty$



Từ đồ thị các hàm số $y = f(x) = \cos^2 x - x$ và $y = g(x) = mx$

Ta có điều phải chứng minh:

ĐS: (1) có nghiệm duy nhất với ∀m.

Bài 180. Phương trình

$$\frac{3}{\sin^2 x}+3\text{tg}^2 x+m(\text{tg}\,x+\text{cot}\,\text{g}\,x)-1=0 \qquad (1)$$

Có điều kiện là $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in Z$ (2)

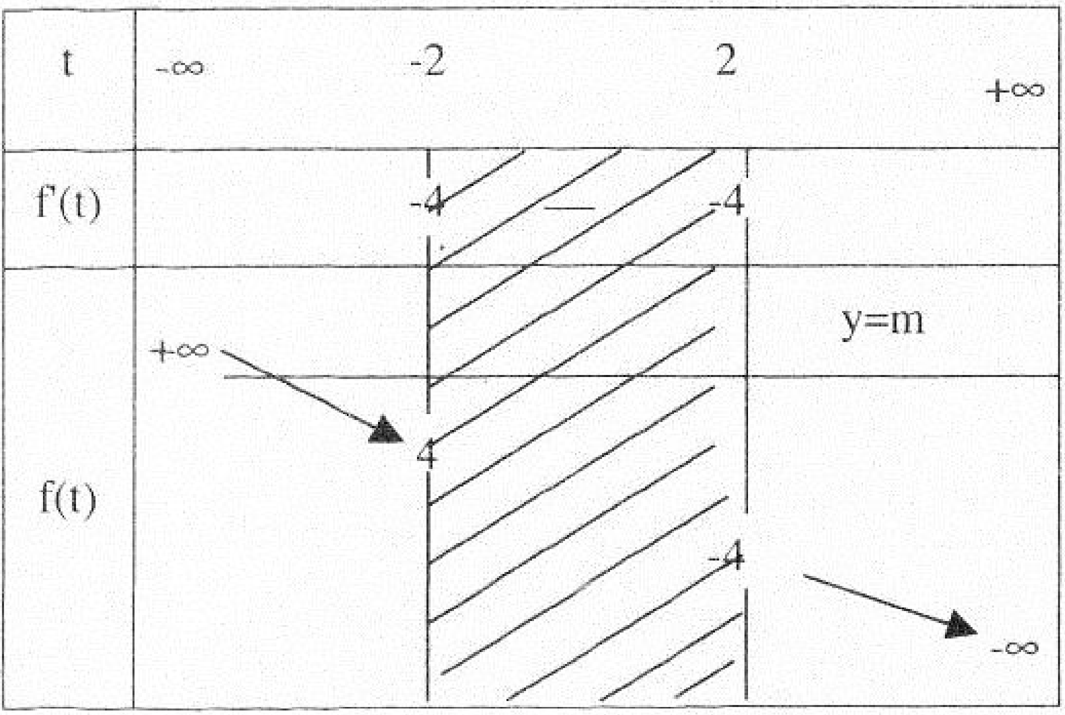
* Khi đó đặt $t=\text{tg}\,x+\text{cotg}\,x \Rightarrow \text{tg}^2x+\text{cotg}^2x=t^2-2, |t|\leq 2$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow 3t^2+mt-4=0$ (3) Với $|t|\leq 2$ (4)

Vì (4) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow\ m=\frac{4-3t^2}{t}=f(t)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(t)=-\frac{4}{t^2}-3<0, \forall|t|\leq 2$$

Bảng biến thiên



Vậy (1) có nghiệm khi và chi khi $|m|\geq 4$

Bài 181. Phương trình

$$(m - 1)\sin^2 x - 2(m + 1)\cos x + 2m - 1 = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\cos^2 x + 2(m + 1)\cos x + 2 - 3m = 0 \qquad (2)$$

* Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow$

Có $x = \left\{\pm\alpha + k2\pi, k \in Z, \cos\alpha = \frac{1}{4}\right\}$ (a)

* Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Rightarrow$

$$(2) \Leftrightarrow m(\cos^2 x + 2\cos x - 3) = \cos^2 x - 2\cos x - 2 \qquad (3)$$

* Nếu $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \Rightarrow (1)$ cho: $- 2m - 2 + 2m - 1 = 0$ là điều vô lý $\Rightarrow \cos x \neq 1 \Rightarrow \cos^2 x + 2\cos x - 3 \neq 0 \ \forall x \Rightarrow$

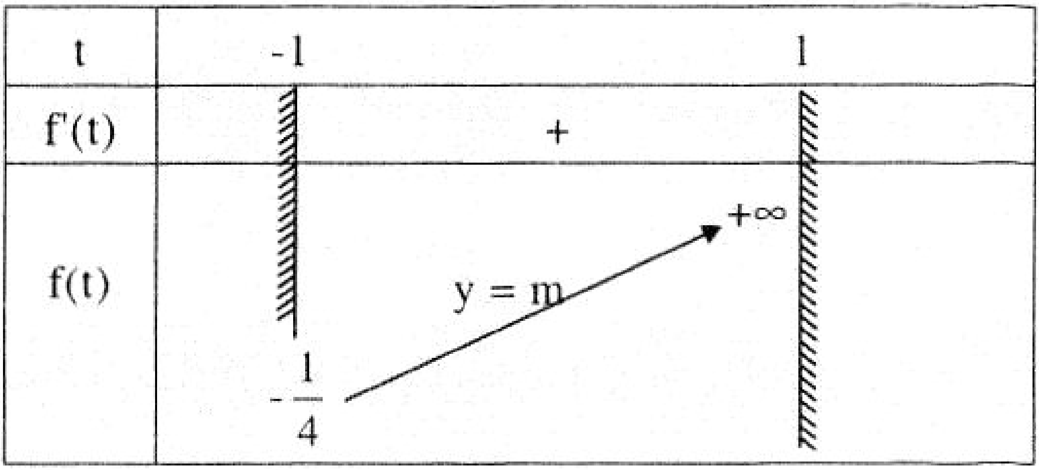
$$(3) \Leftrightarrow m = \frac{\cos^2 x - 2\cos x - 2}{\cos^2 x + 2\cos x - 3}. \text{ Với } \forall x \in R \qquad (4)$$

- Đặt $t = \cos x \Rightarrow - 1 \leq t < 1$ và (4) trở thành

$$m = \frac{t^2 - 2t - 2}{t^2 + 2t - 3} = f(t) \text{Với} -1 \leq t < 1 \qquad (5)$$

Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 - 2t + 10}{(t^2 + 2t - 3)^2} > 0$ Với $\forall t \in [-1,1) \Rightarrow$ Có

Bảng biến thiên



* $f(-1) = -\dfrac{1}{4}$

* $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = +\infty$

* Vậy $m < \dfrac{-1}{4} \Rightarrow (1)$ Vô nghiệm

* $m \geq \dfrac{1}{4} \Rightarrow (5)$ có nghiệm $\Rightarrow (2)$ có nghiệm được xác định bởi $\cos x = \dfrac{-(m+1) \pm \sqrt{\Delta'}}{m-1} = \dfrac{-(m+1) \pm \sqrt{4m^2 - 3m + 3}}{m-1}$

* *Chú ý*: Bạn đọc lưu ý rằng nếu dùng PP tam thức bậc 2 biện luận theo phương trình (2)

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x, |t| \leq 1, m \neq 1 \\ g(t) = (m-1)t^2 + 2(m+1)t + 2 - 3m \end{cases}$ sẽ rất khó khăn.

Bài 182. Phương trình $\sin 4x = m\operatorname{tg} x$ (1)

Có điều kiện là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ (2)

* Khi đó (1) $\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x \cos 2x = m \sin x$ (3)

* Vì $x \neq k\pi \Rightarrow \sin x \neq 0 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow 4\cos 2x.\cos^2 x$

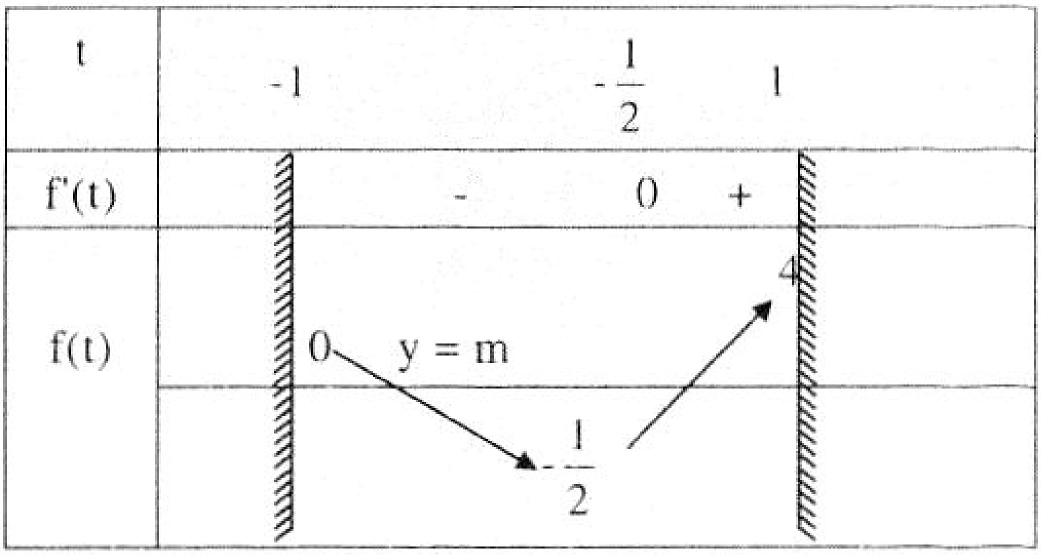
Hay $m = 2\cos^2 2x + 2\cos 2x$ (4)

* Đặt $t = \cos 2x$, Vì $x \neq \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right\} \Rightarrow \cos 2x \neq \pm 1 \Rightarrow$

(4) Trở thành: $m = f(t) = 2t^2 + 2t$ Với $|t| < 1$ (5)

Ta có $f(t) \geq f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $f(-1) = 0, f(1) = 4$

Bảng biên thiên



Vậy (1) có nghiệm $x \neq k\pi$, $k \in Z$ khi và chỉ khi

$$\left(-\frac{1}{2} \leq m < 4\right) \setminus \{0\} \qquad (a)$$

* Khi $m = 0 \Rightarrow$ (1) có $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$. Với $m \neq 4k$, $k \in Z$ (b)

(a) và (b) $\Rightarrow$ *ĐS:* Phương trình (1) có nghiệm $x \neq k\pi$, $k \in Z$ khi và chỉ khi $m \in \left[-\frac{1}{2}; 4\right)$

Bài 183. Phương trình

$$(4 - 6m)\sin^3 x + 3(2m - 1)\sin x +$$
$$+ 2(m - 2)\sin^2 x.\cos x - (4m - 3)\cos x = 0 \qquad (1)$$

không thoả mãn với $\cos x = 0 \Rightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow (4 - 6m)\,tg^3 x + 3(2m - 1)tg\,x(1 + tg^2 x)$$
$$+ 2(m - 2)tg^2 x - (4m - 3)(1 + tg^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (tg\,x - 1)(tg^2 x - 2m\,tg\,x + 4m - 3) = 0 \qquad (2)$$

1) Khi m = 2 ⇒ (2) cho: $(\text{tg } x - 1)(\text{tg}^2 x - 4\text{tg } x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

2) Tìm m để (1) ⇔ (2) có nghiệm duy nhất $\in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Đặt $t = \text{tg } x$ ⇔ (2) cho

$$\begin{cases}(t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0 \\ 0 \le t \le 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \\ t^2 - 2mt + 4m - 2 = 0 \qquad (3)\end{array}\right.$$

Vậy cần tìm m để (3) có đúng một nghiệm t = 1 hoặc (3) vô nghiệm với $0 \le t \le 1$

Ta có (3) $\Leftrightarrow m = \dfrac{t^2 - 3}{2t - 4} = f(t)$. Với $0 \le t \le 1 \Rightarrow$

$f'(t) = \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{(t-2)^2}\right] \ge 0, \forall t \in [0, 1]$ (Dấu "=" khi t = 1).

Bảng biến thiên

t	0		1
f'(t)	‖	+	0 ‖
f(t)	‖	↗	1 ‖
	$\frac{3}{4}$		‖

Vậy (3) vô nghiệm hoặc có đúng 1 nghiệm t = 1 với $t \in [0,1]$ là $\left(m < \dfrac{3}{4}\right) \cup (m \ge 1)$

ĐS: $\left(m < \dfrac{3}{4}\right) \cup (m \ge 1)$

Bài 184. Phương trình

$\cos^3 x - \sin^3 x = m$ (1)

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) = m$ (2)

Đặt $t = \cos x - \sin x \Rightarrow |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow$ (2) trở thành

$t^3 - 3t + 2m = 0$ (3)

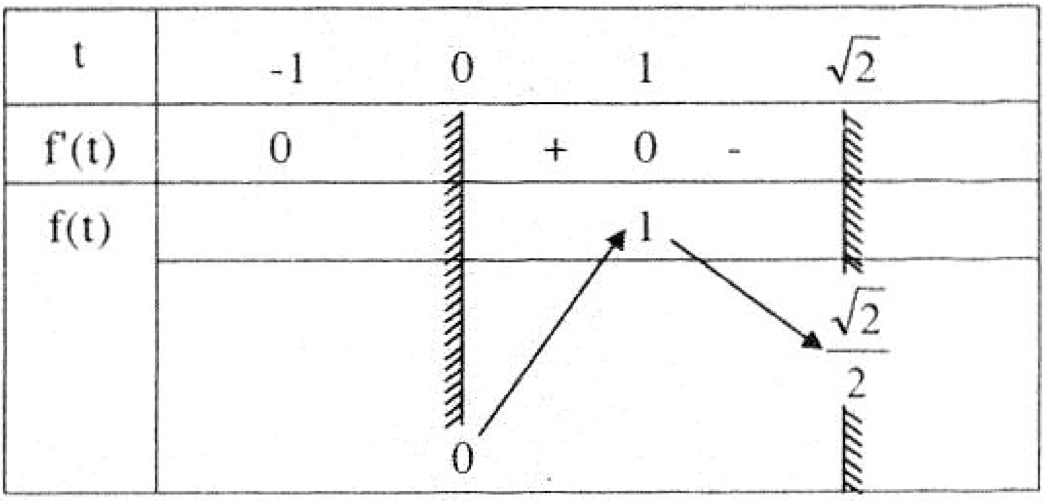
1) Khi $m = 1 \Rightarrow$ (3) cho $t^3 - 3t + 2 = 0$ với $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow$

ĐS: $x = \left\{k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in Z\right\}$

2) Tìm m: (3) $\Leftrightarrow m = \frac{3t - t^3}{2} = f(t)$ (4)

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in [0, \sqrt{2}] \Rightarrow$ cần tìm m để (4) có đúng 2 nghiệm $\in [0, \sqrt{2}]$. Ta có

$f'(t) = \frac{3 - 3t^2}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow$ có bảng biến thiên.



ĐS: $\frac{\sqrt{2}}{2} \le m \le 1$

Bài 185. Phương trình

$$\cos 2x = m(\cos^2 x.\sqrt{1+\operatorname{tg} x} \qquad (1)$$

có điều kiện là: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \operatorname{tg} x \geq 0 \end{cases}$ (2)

* Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{m}{1+\operatorname{tg}^2 x}\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$

$$\Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x = m\sqrt{1+\operatorname{tg} x} \qquad (2)$$

1) Khi m = 1 $\Rightarrow$ (2) cho $1 - \operatorname{tg}^2 x = \sqrt{1+\operatorname{tg} x} \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x \leq 1 \\ (1-\operatorname{tg}^2 x)^2 = 1 + \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg} x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \quad \text{Kết hợp (2)} \Rightarrow \text{\textit{ĐS:}}$$

$$\Rightarrow \text{\textit{ĐS:}} \quad x = \left\{k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi, \alpha + k\pi, k \in Z, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

2) Tìm m.

Đặt $\begin{cases} t = \operatorname{tg} x \\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \end{cases} \Rightarrow t \in [0, \sqrt{3}] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow m = \dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t}}$

(1) có nghiệm $\in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow m = f(t) = \dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t}}$ có nghiệm $\in [0, \sqrt{3}]$

Ta có $\left.\begin{array}{l} f'(t)=\dfrac{-\left(3t^2+4t+1\right)}{2(t+1)\sqrt{t+1}}<0\forall t\in\left[0,\sqrt{3}\right] \\ f(0)=1, f\left(\sqrt{3}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \end{array}\right\}\Rightarrow$

ĐS: (1) có nghiệm $\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ khi và chỉ khi

$$-\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\le m\le 1$$

Bài 186.

Phương trình:

$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$ (1)

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\,[\,2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - m] = 0$ (2)

1) Khi m = 2. *(Xem bài 125-III$_1$-ĐHDL Phương Đông-A-2001).*

ĐS: $x=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k2\pi,k\in Z\right\}$

2) Tìm m: Ta có

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (3)\\ 2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-m=0 & (4)\end{array}\right.$$

Vì (3) không có nghiệm $\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow$ cần tìm m để (4) có ít nhất một nghiệm $\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

* Đặt $\left.\begin{array}{l} t=\cos x-\sin x \\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow |t|\le 1$ và (4) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t+\dfrac{1}{2}$ có $f'(t) = -t + 2 > 0$, $\forall t\in[-1,1]$.

Lại có f(-1) = -2, f(1) = 2 ⇒ *ĐS:* $|m| \le 2$.

Bài 187. Để g(x) có nghĩa thì f(x) ≠ 0

⇒ Phương trình (m-3)g(x) = 3[f(x) - m]   (1)

Có điều kiện là f(x) ≠ 0.

* Khi đó rút gọn g(x) ta có:

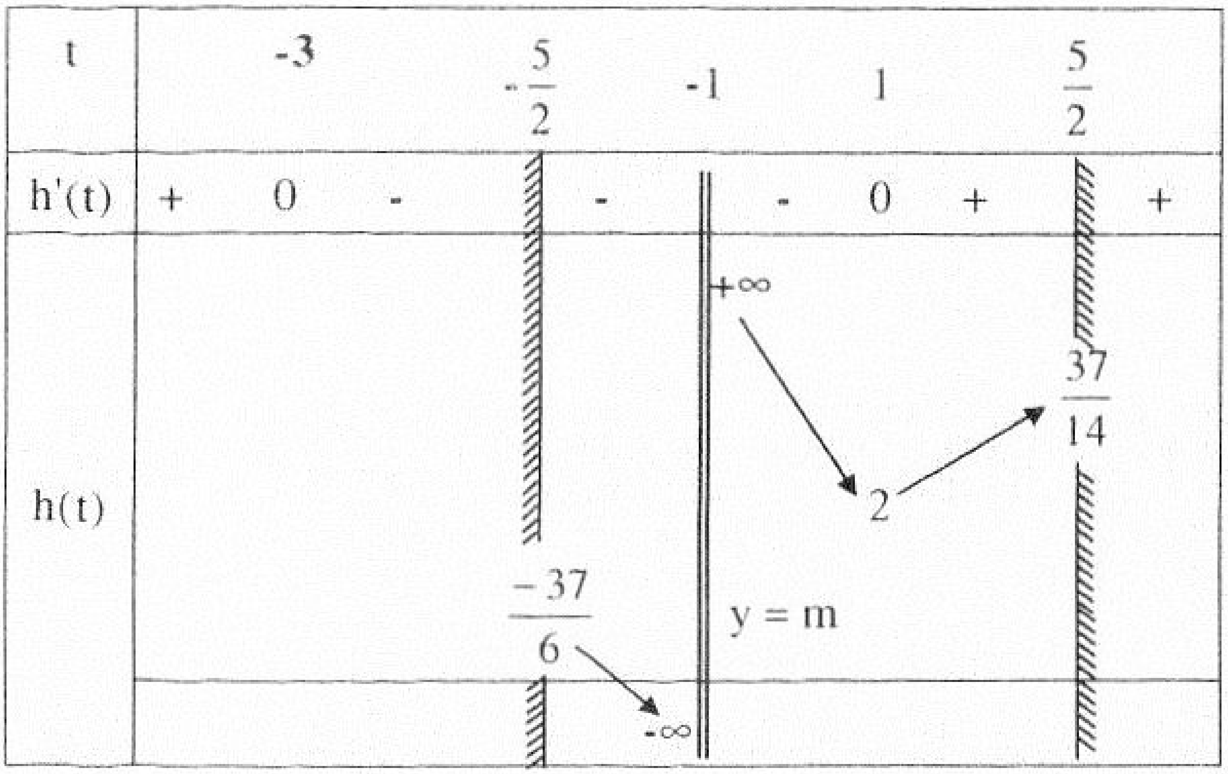
$$g(x)=\frac{3}{f(x)}\Rightarrow$$

Đặt $t = f(x) \Rightarrow t\in\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]\setminus\{0\}\Rightarrow$

$$(1)\Leftrightarrow(m-3)\frac{3}{t}=3(t-m)\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{t^2+3}{t+1}=h(t)\\ t\in\left[-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right]\setminus\{0,-1\}\end{cases}$$

Ta có $h'(t)=\dfrac{(t+1)^2-4}{(t+1)^2}=0\Leftrightarrow t=\{1,-3\}\Rightarrow$ có

Bảng biến thiên


t
-3
$-\frac{5}{2}$
-1
1
$\frac{5}{2}$
h'(t)
+
0
-
-
-
0
+
+
h(t)
+∞
$\frac{37}{14}$
2
$\frac{-37}{6}$
y = m
-∞

Vậy có *ĐS:* $\left(m \le -\frac{37}{6}\right) \cup (2 \le m \ne 3)$

Bài 188. Hiển nhiên nếu x_0 là nghiệm của

$ax^2 + \cos x + a - 1 = 0$ (1) thì $(-x_0)$ cũng là nghiệm của (1) trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Vì tính chất duy nhất của nghiệm

$\Rightarrow$ có $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

* Điều kiện cần: Nếu $x_0 = 0 \Rightarrow$ (1) cho: $1 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = 0$ là điều kiện cần.

* Điều kiện đủ: Nếu $a = 0 \Rightarrow$ (1) cho $\cos x = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

* Vậy $a = 0$ là điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm duy nhất trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 189. Điều kiện cần: Nếu phương trình

$$m\sin x + \cos m\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \qquad (1)$$

Có nghiệm với $\forall\, x \in R$, thì nói riêng, với $x = \frac{\pi}{2}$ phương trình (1) cũng phải thoả mãn. Khi đó ta có:

$m.1 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow m = 0$ là điều kiện cần.

* Điều kiện đủ: Khi $m = 0 \Rightarrow$ phương trình.

(1) cho: $1 - 1 = 0$ với $\forall\, x \in R$.

* *ĐS*: $m = 0$ là điều kiện cần và đủ để (1) đúng với $\forall\, x \in R$.

Bài 190. Phương trình: $\sin 2x + 3\cos x - 2\sin x - 3 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\cos x - 2\sin x - 3 = 0.$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 1) + 3(\cos x - 1) = 0.$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$ (a)

* Phương trình: $\cos^3x + 4\cos^2x + (a + 1)\cos x - 7 = 0$ (2)

$\Leftrightarrow (\cos^3x + 4\cos^2x + \cos x - 6) + a\cos x - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x + 2)(\cos x + 3) + a\cos x - 1 = 0$ (3)

* Điều kiện cần: Nếu (1) và (2) tương đương với nhau thì nghiệm của (1) phải thoả (2) $\Rightarrow$ có (3) trở thành:

$a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ là điều kiện cần của bài toán.

* Điều kiện đủ: Nếu $a = 1 \Rightarrow$

$(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (\cos x - 1)[(\cos x + 2)(\cos x + 3) + 1] = 0$ (4)

Lượng trong dấu [ ] luôn dương với $\forall x \in R \Rightarrow$

$(4) \Leftrightarrow \cos x = 1$ (b)

* (a) và (b) $\Rightarrow$ *ĐS*: phương trình (1) và (2) tương đương với nhau khi và chỉ khi a = 1.

Bài 191. Phương trình

$2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$ (1)

$\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

* Phương trình (2):

$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = a\cos x + (4 - a)\, 2\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + a\cos x + 4\cos^2 x - 2a\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2(2 - a)\cos^2 x + (a - 3)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,[4\cos^2 x + 2(2 - a)\cos x + a - 3] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)(4\cos x - 2a + 6) = 0.$

$\Leftrightarrow \cos x = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{a-3}{2}\right\} \Rightarrow$

(1) ⇔ (2) khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a-3}{2} = 0 \\ \dfrac{a-3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a-3}{2} < -1 \\ \dfrac{a-3}{2} > 1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *ĐS:* $(a < 1) \cup (a > 6) \cup \{3, 4\}$

Bài 192. Phương trình (1):

$a\sin 2x + \sqrt{2} = 2\cos x + a\sqrt{2}\sin x$

$\Leftrightarrow 2a\sin x\cos x + \sqrt{2} = 2\cos x + a\sqrt{2}\sin x$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - \sqrt{2}\right)(a\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (a) \\ a\sin x = 1 \end{array}\right.$

* Phương trình (2):

$2\sin^2 x + \cos 2x + \sin 2x + b = 2b\sin x + \cos x + 1.$

$\Leftrightarrow 2\sin^2x + \cos2x - 1 + \sin2x - \cos x = (2\sin x - 1)\,b.$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x - (2\sin x - 1)b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = b\end{array}\right.$ (b)

* Trường hợp 1: Nếu a = 0 $\Rightarrow$ (1) cho $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ (1) và (2) không tương đương nhau.

* Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0 \Rightarrow$ (1) và (2) tương đương với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow$ *ĐS:* $a = 2$ và $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 193.

1) Phương trình : $\sin3x + \cos2x = 1 + \sin x.\cos 2x$ (1)

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3x + 1 - 2\sin^2x = 1 + 2\sin x(1 - 2\sin^2x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2x - \sin x = 0$ (a)

$\Rightarrow$ *ĐS:* $x = \left\{k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in Z\right\}$

2) Phương trình (2): $\sin3x - m\sin x = (4 - 2|m|)\sin^2x.$

$\Leftrightarrow 4\sin^3x + (4 - 2|m|)\sin^2x + (m - 3)\sin x = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\sin^2 x + 2(2 - |m|)\sin x + m - 3 = 0\end{array}\right.$ (3)

* Điều kiện cần: Nếu (1) và (2) tương đương với nhau thì:

+ Với nghiệm sin x = 0 của (1), phương trình (3) cho m = 3.

+ Với nghiệm $\sin x = \dfrac{1}{2}$ của (1), phương trình (3) cho

$- |m| + m = 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy điều kiện cần để (1) và (2) tương đương nhau là

$(m = 3) \cup m \geq 0$.

* Điều kiện đủ:

+ Với $m = 3 \Rightarrow$ phương trình (3) cho $2\sin^2 x - \sin x = 0$.

$$\Leftrightarrow \sin x = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \text{thoả mãn} \qquad (1)$$

+ Với $m \geq 0 \Rightarrow$ (3) cho

$$4\sin^2 x + 2(2 - m)\sin x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{m-3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy để (1) và (2) tương đương nhau thì:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{m-3}{2} = 0 \\ \frac{m-3}{2} = \frac{1}{2} \\ \left|\frac{m-3}{2}\right| > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 4 \\ 0 \leq m < 1 \quad \text{hoặc} \quad m > 5 \end{array}\right.$$

* *ĐS:* $m = \{3,4\} \cup (0 \leq m < 1) \cup (m > 5)$ là điều kiện cần và đủ để (1) và (2) tương đương nhau.

* Cách khác: có thể thế trực tiếp x của (1) vào (2) để tìm ra kết quả.

Bài 194.

Đặt $t = |\sin x| \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ và phương trình

$$3\cos^2 x + 2|\sin x| = m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 2t + m - 3 = 0 \qquad (2)$$

1. Khi $m = 2 \Rightarrow$ (2) cho $3t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \\ t = |\sin x| = -\dfrac{1}{3} \text{ (Loại)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS:* $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

2) Tìm m: Điều kiện cần:

Hiển nhiên nếu (1) có $x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ là nghiệm thì $(-x_0)$ cũng là 1 nghiệm. Do tính duy nhất của nghiệm $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ (1) cho m = 3, đó là điều kiện cần.

* Điều kiện đủ: Với $m = 3 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = |\sin x| = 0 \\ t = |\sin x| = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2) tức (1) cho 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow$

ĐS: $m = \phi$

CHỦ ĐỀ 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. ***Thế nghiệm***: Tìm nghiệm từ một phương trình đem thế vào phương trình còn lại.

2. ***Thế ẩn:*** Từ một phương trình tìm cách biểu diễn một ẩn theo ẩn còn lại, rồi thế vào phương trình còn lại.

3. ***Thế hàm:*** Từ một phương trình tìm cách biểu diễn một hàm số lượng giác theo các hàm khác, rồi thế vào phương trình còn lại.

4. Giải cả 2 phương trình rồi lấy nghiệm chung; hoặc *đặt ẩn phụ* đưa về một hệ phương trình đại số đối với ẩn phụ.

B. PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

1. Phương pháp trực tiếp

2. Phương pháp tam thức bậc 2 (Định lý thuận, đảo).

3. Phương pháp giải tích (Bảng biến thiên, ...) và đồ thị.

4. Phương pháp cần và đủ.

II. ĐỀ BÀI

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG CHỨA THAM SỐ

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 195. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = x - y & (1) \\ \sin x + \sin y = 1 & (2) \end{cases}$$

Bài 196.Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x + 3\sin x = 2\cos y & (1) \\ \cos y + 3\sin y = 2\cos x & (2) \end{cases}$$

Bài 197. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 3y\cos x + 2\cos^2 x = 0 & (1) \\ \cos 3x + \cos 2x + \cos x - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Bài 198. Giải phương trình:

$$\sin x.\cos 3x = 1$$

Bài 199. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = 1 & (1) \\ \sin x + \sin y = 1. & (2) \end{cases}$$

Bài 200. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sin(x + 2y) + \sin y = 0 & (1) \\ 2\sin(2x + y) + \sin x = 0 & (2) \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CAO ĐẲNG - ĐẠI HỌC NĂM 2000 VÀ 2001

1. Phương pháp thế nghiệm

Bài 201. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 1 & (1) \\ \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 & (2) \\ x + y + z = \pi & (3) \end{cases}$$

(Câu III$_1$- Đề 104)

Bài 202. Tìm x, y thoả mãn phương trình

$$x^2 - 2x.\sin(xy) + 1 = 0$$

(Câu III$_1$- CĐSP - TP. HCM)

2. Phương pháp thế ẩn

Bài 203. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \ \cos y & (1) \\ \cos^2 x = \sin x \ \sin y & (2) \end{cases}$$

(Câu III$_1$- Đề 79.)

Bài 204. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} & (1) \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

(Câu III$_1$- ĐH Y Dược - TP. HCM - 2000 - II$_1$- Đề 33)

3. Phương pháp thế hàm

Bài 205. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x = 1 & (1) \\ \cos 2y = \sqrt{3} \cos 2x = -1 & (2) \end{cases}$$

(Câu II$_1$- Đề 75)

Bài 206.

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \sin x \sin y = -\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

(Câu III- ĐH DL Kỹ thuật - Công nghệ - A và B -2001)

4. Phương pháp gải cả hai phương trình rồi lấy nghiệm chung, hoặc đặt ẩn phụ

Bài 207. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} & (1) \\ 3\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,y & (2) \end{cases}$$

(Câu III_1- Đề 12)

Bài 208. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) & (1) \\ \mathrm{tg}\,y + \mathrm{cotg}\,y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$$

(Câu II_1- Đề 23)

Bài 209. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x - 7\cos y = 0 & (1) \\ 5\sin y - \cos x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

(Câu II_2- Đề 119)

Bài 210. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9\sin^2 x - 5\sin x \sin 2x + 17\cos x - 11 = 0 & (1) \\ 5\cos^3 x - 3\sin^2 x + 8\cos x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(Câu II_1- Đề 133)

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 211. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 & (1) \\ \cos x + \cos y + \cos z = 1 & (2) \\ x + y + z = \pi & (3) \end{cases}$$

Bài 212. Tìm giá trị lớn nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 1 & (1) \\ \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = m & (2) \end{cases}$$

Bài 213. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x - \mathrm{tg}\, y = 0 & (1) \\ \sin^2 x + m\, \mathrm{tg}\, y = m & (2) \end{cases}$$

Bài 214. Hãy biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + m\, \mathrm{tg}\, y = m & (1) \\ \mathrm{tg}^2 y + m \sin x = m & (2) \end{cases}$$

Bài 215. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sin |x| - m \cos x = 1 & (1) \\ \log_4(m|x| + 4) = 1 & (2) \end{cases}$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ - ĐH CÁC NĂM 2000 VÀ 2001

1. Phương pháp biện luận trực tiếp

Bài 216.

Cho hệ
$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = m & (1) \\ \cos x + \cos 2x = m & (2) \end{cases}$$

1. Giải hệ khi m = 0
2. Xác định m để hệ số có nghiệm

(Câu III - Đề 98)

Bài 217.

Giải và biện luận theo α hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = \alpha & (1) \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) & (2) \end{cases}$$

(Câu III_1 - Đề 122 + 65)

2. Phương pháp tam thức bậc 2

Bài 218. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \cos 2x + \cos 2y = m & (2) \end{cases}$$

(Câu III_1 - Đề 103)

Bài 219. Cho hệ

$$\begin{cases} \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 & (1) \\ \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha).\log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 & (2) \end{cases}$$

1. Giải hệ khi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

2. Cho $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Hãy biện luận hệ

(Câu I - Đề 31)

3. Phương pháp giải tích

Bài 220. Tìm các số x, y thuộc $(0, \pi)$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y = x - y & (1) \\ 5x + 8y = 2\pi & (2) \end{cases}$$

(Câu II_1 - Đề 108)

4. Phương pháp cần và đủ

Bài 221.

Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| & (1) \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(Câu III_2 - Đề 103)

Bài 222. Tìm a để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x = a\cos^3 y & (1) \\ \sin x = a\sin^3 y & (2) \end{cases}$$

(Câu II_2 - Đề 126)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 195. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = x - y & (1) \\ \sin x + \sin y = 1 & (2) \end{cases}$$

Có (1) $\Leftrightarrow \sin x - x = \sin y - y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = \sin t - t$ trên R $\Rightarrow f'(t) = \cos t - 1 \le 0$

$\Rightarrow$ hàm f(t) nghịch biến trên R. Để có (3) cần có x = y

$\Rightarrow$ (2) cho $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\},\quad k \in z$

$$\Rightarrow ĐS: \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi = y,\quad k \in z \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi = y,\quad k \in z \end{array}\right.$$

Bài 196. Cộng trừ vế với vế 2 phương trình của hệ đã cho:

$$\begin{cases} \cos x + 3\sin x = 2\cos y & (1) \\ \cos y + 3\sin y = 2\cos x & (2) \end{cases}$$

Ta có hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} & (3) \\ \cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2} & (4) \end{cases}$$

* Trường hợp 1:

$$\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2} \ne 0 \\ \sin\frac{x-y}{2} \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ}(3), (4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin\frac{x+y}{2} = \cos\frac{x+y}{2} \\ \cos\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x+y}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin\frac{x+y}{2} = 0 = \cos\frac{x+y}{2} \Rightarrow$ Vô lý

* Trường hợp 2:

$$\cos\frac{x-y}{2}=0 \Rightarrow \sin\frac{x-y}{2}=\pm 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (4) cho $\text{tg}\,\frac{x+y}{2}=1$. Vậy hệ (3), (4) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x-y}{2}=0 \\ \text{tg}\,\frac{x+y}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\pi+k2\pi \\ x+y=\frac{\pi}{2}+l2\pi \end{cases} \quad k, l \in z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}+(k+l)\pi \\ y=-\frac{\pi}{4}+(l-k)\pi \end{cases}$$

* Trường hợp 3: $\sin\frac{x-y}{2}=0$

Khi đó: $\cos\frac{x-y}{2}\neq 0 \Rightarrow$ (1) cho $\text{tg}\,\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}$ Vậy hệ (3), (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x-y}{2}=0 \\ \text{tg}\,\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}=\text{tg}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+(m+n)\pi \\ y=\alpha+(n-m)\pi \end{cases} \quad n, m \in z$$

ĐS: $\left[\begin{array}{l} \left(x=\frac{3\pi}{4}+(k+l)\pi,\ y=-\frac{\pi}{4}+(l-k)\pi\right) \\ \left(x=\alpha+(m+n)\pi,\ \ y=\alpha+(n-m)\pi\right) \end{array}\right.$ k, l, m, n$\in$ z

Bài 197. Hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} y^2-3y\cos x+2\cos^2 x=0 & (1) \\ \cos 3x+\cos 2x+\cos x-3=0 & (2) \end{cases}$$

Có (1) $\Leftrightarrow y = \dfrac{3\cos x \pm \sqrt{9\cos^2 x - 8\cos^2 x}}{2} = \left[\begin{array}{l}\cos x\\ 2\cos x\end{array}\right.$

Vậy hệ (1), (2) tương đương 2 hệ sau:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} y = \cos x \\ 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 4 = 0 \end{cases}$$

hoặc $(\mathrm{II})\begin{cases} y = 2\cos x \\ 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 4 = 0 \end{cases}$

a) (I) $\Rightarrow 4y^3 + 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(2y^2+3y+2)=0 \Leftrightarrow y=1$

$\Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in z$

b) (II) $\Rightarrow y^3 + y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2+3y+4) = 0 \Leftrightarrow y = 2$

$\Rightarrow \cos x = 2 \Rightarrow$ Vô nghiệm

ĐS: $(x = k2\pi,\ y = 1),\ k \in z$

Bài 198. Phương trình $\sin x.\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = 2$ (1)

Vì: $|\sin u| \le 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathrm{I})\begin{cases}\sin 4x = 1\\ \sin 2x = -1\end{cases}$ hoặc $(\mathrm{II})\begin{cases}\sin 4x = -1\\ \sin 2x = -3\end{cases}$ hoặc $(\mathrm{III})\begin{cases}\sin 2x = 1\\ \sin 4x = 3\end{cases}$

Hiển nhiên (II), (III) vô nghiệm.

Còn (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow 1 + 4k = -2 + 2l$

$\Leftrightarrow 3 = 2(l - 2k)$ (2) vế phải (2) là số nguyên chẵn với $\forall k, l$

$\Rightarrow$ *ĐS*: Vô nghiệm

* ***Cách khác***:

Vì $|\sin u| \le 1$, $|\cos v \le 1| \Rightarrow$ phương trình đã cho

$$\sin x\cos 3x = 1 \Leftrightarrow (I)\begin{cases}\sin x = 1\\ \cos 3x = 1\end{cases} \text{ hoặc } (II)\begin{cases}\sin x = -1\\ \cos 3x = -1\end{cases}$$

$$\text{Xét } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = l2\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 3 = 4(l - 3k)\ (1)$$

Vế phải (1) là số chẵn với ∀ k, l ∈ z ⇒PT(1) Vô nghiệm

$$\text{Xét } (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = (2l+1)\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 5 = 4(3k - l)\ (2)$$

Vế phải (2) là số chẵn với ∀ k, l ∈ z ⇒ PT(2) vô nghiệm.

Vậy ⇒ *ĐS*: Vô nghiệm

Bài 199. Hệ phương trình:

$$\begin{cases}\cos 2x + \cos 2y = 1 & (1)\\ \sin x + \sin y = 1 & (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1 - \cos 2x) + (1 - \cos 2y) = 1\\ \sin x + \sin y = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2} & (3)\\ \sin x + \sin y = 1 & (4)\end{cases}$$

Đặt $u = \sin x, v = \sin y \Rightarrow$ $|u|, |v| \le 1 \quad \Rightarrow$

Hệ (3), (4) $\Leftrightarrow \begin{cases}u^2 + v^2 = \dfrac{1}{2}\\ u + v = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}uv = \dfrac{1}{4}\\ u + v = 1\end{cases} \Rightarrow$ u, v là hai nghiệm

của phương trình : $X^2 - X + \dfrac{1}{4} = 0$ Với $|X| \le 1$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2} = \sin x = \sin y \Rightarrow$$

ĐS: $\left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = y = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $k \in z$

Bài 200. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sin(x+2y)+\sin y=0 & (1)\\ 2\sin(2x+y)+\sin x=0 & (2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin[(x+y)+y]+\sin y=0\\ 2\sin[(x+y)+x]+\sin x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y[2\sin(x+y)]+\sin y[2\cos(x+y)+1]=0\\ \cos x[2\sin(x+y)]+\sin x[2\cos(x+y)+1]=0\end{cases}$$

Đặt $\left.\begin{array}{ll} 2\sin(x+y)=u, & \cos y=a_1,\ \sin y=b_1\\ 2\cos(x+y)+1=v, & \cos x=a_2,\ \sin x=b_2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}|u|\le 2\\ |v|\le 3\end{cases}$

Hệ (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1u+b_1v=0\\ a_2u+b_2v=0\end{cases}$ Đó là hệ phương trình bậc nhất thuần nhất. Do đó:

Trường hợp 1:

Nếu $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos y & \sin y\\ \cos x & \sin x\end{vmatrix}=\sin(x-y)\neq 0$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm thoả mãn $\begin{cases}\sin(x+y)=0\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2:

Nếu $D=0 \Leftrightarrow \sin(x-y)=0 \Leftrightarrow x=y+k\pi,\ k\in Z$

Thay vào 1 trong 2 phương trình (1) hoặc (2) ta có, chẳng hạn thay vào (2):

$$2\sin 3y+\sin(y+k\pi)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin 3y+\sin y=0 \text{ nếu } k=2l\\ 2\sin 3y-\sin y=0 \text{ nếu } k=2l+1\end{array}\right.$$

a) Xét: $2\sin 3y+\sin y=0 \Leftrightarrow \sin y(7-8\sin^2 y)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = 0 \Leftrightarrow y = m\pi \Rightarrow x = (m+2l)\pi,\ m, l \in z \\ \sin^2 y = \dfrac{1-\cos 2y}{2} = \dfrac{7}{8} \Leftrightarrow \cos 2y = -\dfrac{3}{4} = \cos\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\frac{\alpha}{2} + m\pi \Rightarrow n = \pm\frac{\alpha}{2} + (m+2l)\pi, m, l \in z$$

b) $2\sin 3y - \sin y = 0 \Leftrightarrow \sin y[5 - 8\sin^2 y] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = 0 \\ \sin^2 y = \dfrac{5}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = m\pi \Rightarrow x = (m+2l+1)\pi \quad \text{Với } m, l \in z \\ \cos 2y = \dfrac{-1}{4} = \cos\beta \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\beta}{2} + m\pi \qquad \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow x = \pm\dfrac{\beta}{2} + (m+2l+1)\pi,\ m,\ k \in z \end{array}\right.$$

ĐS:

$$(x = (m+2l)\pi,\ y = m\pi); \left(x = \pm\frac{\alpha}{2} + (m+2l)\pi, y = \pm\frac{\alpha}{2} + m\pi\right)$$

$$(x = (m+2l+1)\pi,\ y = m\pi); \left(x = \pm\frac{\beta}{2} + (m+2l+1)\pi, y = \pm\frac{\beta}{2} + m\pi\right)$$

Với : $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$, $m,\ l \in z$

Bài 201. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 1 & (1) \\ \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 & (2) \\ \quad x + y + z = \pi & (3) \end{cases}$$

Có $(1) \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 2\sin^2\left(\dfrac{z}{2}\right) \qquad (4)$

$$(3) \Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \sin\frac{z}{2} \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \sin\frac{z}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}=0$$

* Nếu $\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k\in Z$. Thế vào (2) $\Rightarrow$

$$\cos^2 y+\cos^2 Z=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos y=0\\ \cos Z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\pi}{2}+l.\pi\\ Z=\dfrac{\pi}{2}+m\pi\end{cases} l, m\in Z$$

$$(3) \Rightarrow k2\pi+\frac{\pi}{2}+l\pi+\frac{\pi}{2}+m\pi=\pi \Leftrightarrow m=-(l+2k)$$

* Tương tự cho $\sin\frac{y}{2}=0,\ \sin\frac{3}{2}=0$

$$ĐS: \left[\begin{array}{l} \left(x=k2\pi, y=\dfrac{\pi}{2}+l.\pi,\ \ z=\dfrac{\pi}{2}-(l+2k)\pi\right)\\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}+l\pi\ , y=k2\pi,\ \ z=\dfrac{\pi}{2}-(l+2k)\pi\right)\\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}+l\pi,\ y=\dfrac{\pi}{2}-(l+2k)\pi,\ \ z=k2\pi\right);\ k, l\in Z\end{array}\right.$$

Bài 202. Phương trình

$$x^2-2x\sin(xy)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x.\sin(xy)+[\sin^2(xy)+\cos^2(xy)]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\sin(xy)\\ \cos(xy)=0 \Leftrightarrow \sin^2(xy)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sin(xy)\\ \sin(xy)=1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=\sin(xy)\\ \sin(xy)=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ \sin y=1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=-1\\ \sin y=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow ĐS: \left[\begin{array}{l}\left(x=1, y=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)\\ \left(x=-1,\ y=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)\end{array}\right. k\in Z$$

Bài 203. Cộng vế với vế của hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos x.\cos y & (1) \\ \cos^2 x = \sin x.\sin y & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 = \cos(x-y) \Leftrightarrow x = y + k2\pi,\ k \in Z(3)$, thế (3) vào chẳng hạn (1), ta có $\sin^2 y = \cos^2 y \Leftrightarrow \sin y = \pm \cos y$

$\Rightarrow$*ĐS*: $\left(x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}\right)$, k, m$\in Z$

Bài 204. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} & (1) \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{2} & (3) \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

Nếu $\cos\frac{x-y}{2} = 0 \Rightarrow$ hệ vô lý $\Rightarrow$ từ hệ (3), (4) $\Rightarrow$

$$\text{tg}\frac{x+y}{2} = 1 \Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k\in Z$$

Thế y, chẳng hạn vào (1) ta có: $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \ell 2\pi,\quad \ell \in Z \Rightarrow$$

ĐS: $\left(x = \frac{\pi}{4} + \ell 2\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + m2\pi\right)\ \ell, m \in Z$

Bài 205. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \text{tg}y - \text{tg}x - \text{tg}y\,\text{tg}x = 1 & (1) \\ \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1 & (2) \end{cases}$$

Có điều kiện là * $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos y \neq 0\end{cases}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ tgy - tgx = 1 + tgy.tgx (3)

Nếu 1 + tgy.tgx = 0 $\Rightarrow$ tgy - tgx = 0 $\Leftrightarrow$ tgy = tgx $\Rightarrow$
$1 + tg^2x = 0$ Vô lý.

Vậy (3) $\Leftrightarrow$ tg(y- x) = 1 $\Leftrightarrow$ $2y = 2x + \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

$$\Rightarrow \cos 2y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x \qquad (4)$$

Thay (4) vào (2) ta có: $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi\right)\\ \left(x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi\right)\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện *

$\Rightarrow$ *ĐS*: $\left(x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ y = -\frac{\pi}{6} + m\pi\right),\ k, m \in Z$

Bài 206.

Hệ phương trình đã cho $\begin{cases}\cos x \cos y = \frac{1}{2} & (1)\\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x+y) + \cos(x-y) = 1\\ \cos(x+y) - \cos(x-y) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x+y) = 1\\ \cos(x-y) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + y = 12\pi\\ x - y = \frac{\pi}{2} + k2\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow ĐS: \left(x = \frac{\pi}{4} + (k+2l)\frac{\pi}{2},\ y = -\frac{\pi}{4}(2l-k)\frac{\pi}{2}\right),\ k, l \in Z$$

Bài 207. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} & (1) \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y & (2) \end{cases} \text{ có điều kiện là } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Khi đó hệ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\sin x \cos y = \sin y \cos x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \sin y \cos x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ x - y = -\dfrac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ x - y = \dfrac{7\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$$

Kết hợp (3) *ĐS*:

$$\left(x = \frac{\pi}{6} + (m+n)\pi,\ y = \frac{\pi}{3} + (m-n)\pi\right)$$

$$\left(x = \frac{5\pi}{6} + (m+n)\pi,\ y = -\frac{\pi}{3} + (m-n)\pi\right)$$

$$m, n \in Z$$

Bài 208. Hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} \text{tg}x + \cot gx = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) & (1) \\ \text{tg}y + \cot gy = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$$

Có điều kiện là : $\begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ y \neq \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} \quad k \in Z \qquad (3)$

Khi đó, vì $|\text{tgu} + \text{cotgu}| \geq 2$, $|2\sin v| \leq 2$, $\Rightarrow$

phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tgx} + \cot gx = 2 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \text{tgx} + \cot gx = -2 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$

Vì tgu và cotgu luôn cùng dấu với $\forall u \neq \dfrac{k\pi}{2} \Rightarrow$

$$(1) \begin{cases} \text{tgx} = \cot gx = 1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \text{tgx} = \cot gx = -1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, y = \dfrac{\pi}{4} + l2\pi\right) \\ \left(x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, y = -\dfrac{3\pi}{4} + l2\pi\right) \end{array}\right. k, l \in Z \qquad (a)$$

* Tương tự ta có (2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x = \dfrac{3\pi}{4} + l2\pi, y = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) \\ \left(x = -\dfrac{\pi}{4} + l2\pi, y = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) \end{array}\right. k, l \in Z \qquad (b)$$

Kết hợp (3), từ (a) và (b) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ĐS: \left(x = \frac{3\pi}{4} + m2\pi, y = -\frac{3\pi}{4} + m2\pi \right) m \in Z$$

Bài 209. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \sin x - 7\cos y = 0 \quad (1) \\ 5\sin y - \cos x + 6 = 0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 7\cos y \\ \cos x = 5\sin y + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 49\cos^2 y \\ \cos^2 x = 25\sin^2 y + 60\sin y + 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 49\cos^2 y + 25\sin^2 y + 60\sin y + 36$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 y - 15\sin y - 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = -1 \Rightarrow \cos x = 1 \\ \sin y = \frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{array} \right.$$

Thử lại ta có ⇒

$$\Rightarrow ĐS: \left(x = k2\pi, y = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right), k \in Z$$

Bài 210. Hệ phương trình đã cho.

$$\begin{cases} 9\sin^2 x - 5\sin x \sin 2x + 17\cos x - 11 = 0 \quad (1) \\ 5\cos^3 x - 3\sin^2 x + 8\cos x - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9(1 - \cos^2 x) - 10\sin^2 x \cos x + 17\cos x - 11 = 0 \\ 5\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) + 8\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\cos^3 x - 9\cos^2 x + 7\cos x - 2 = 0 \\ 5\cos^3 + 3\cos^2 x + 8\cos x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\cos^3 x - 9\cos^2 x + 7\cos x - 2 = 0 \\ 10\cos^3 x + 6\cos^2 x + 16\cos x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{2}{5} = \cos\alpha \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ *ĐS:* $x = \pm\alpha + k2\pi, k \in Z, \cos\alpha = \frac{2}{5}$

Bài 211. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 & (1) \\ \cos x + \cos y + \cos z = m & (2) \\ x + y + z = \pi & (3) \end{cases}$$

có (1) $\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{z}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} = 0 \qquad (4)$$

* Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in Z \Rightarrow$ Hệ (2), (3) trở thành:

$$\begin{cases} \cos(2k+1)\pi + \cos y + \cos z = m \\ y = \pi - z - x = -z - k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(z + k2\pi) + \cos z = m + 1 \\ y = -(z + k2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos z = m + 1 \\ y = -(z + k2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos z = \frac{m+1}{2} = \cos\alpha \\ y = -(z + k2\pi) \end{cases} \Rightarrow$$

Để phương trình có nghiệm, cần và đủ là

$$\frac{|m+1|}{2} \le 1 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$$

* Tương tự khi $\cos\frac{y}{2} = \cos\frac{z}{2} = 0$

ĐS: $-3 \le m \le 1$

Bài 212. Giả sử hệ

$$\begin{cases}\cos x + \cos y + \cos z = 1 & (1)\\ \cos x \cos y \cos z = m & (2)\end{cases}$$ có nghiệm (x_0, y_0, z_0) thì

có 2 khả năng: $\cos x_0.\cos y_0 \cos z_0 \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$ (a)

hoặc $\cos x_0.\cos y_0 \cos z_0 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2 \text{ Thừa số} < 0 \text{ và 1 thừa số dương}\\ 3 \text{ thừa số} > 0\end{array}\right.$$

* Nếu 2 thừa số < 0 (giả sử $\cos x_0$, $\cos y_0 < 0$) còn một thừa số > 0 (giả sử $\cos z_0 > 0$) Khi đó.

(1) cho $\cos z_0 + (\cos x_0 + \cos y_0) = 1 \Rightarrow \cos z_0 > 1$ Vô lý.

* Nếu 3 thừa số > 0 ⇒ Theo BĐT côsi ta có:

$$\sqrt[3]{\cos x_0 \cos y_0 \cos z_0} \le \frac{\cos x_0 + \cos y_0 + \cos z_0}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{m} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m \le \frac{1}{27} \qquad \text{(b)}$$

* (a) và (b) ⇒ $m \le \frac{1}{27}$ ⇒ giá trị lớn nhất của m để hệ có nghiệm cần phải là $m = \frac{1}{27}$.

* Ngược lại: Với $m = \frac{1}{27} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ có hệ } \begin{cases}\cos x + \cos y + \cos z = 1\\ \cos x \cos y \cos z = \frac{1}{27}\end{cases}$$

Hệ đó ít nhất cũng có 1 nghiệm thoả mãn điều kiện

$$\cos x = \cos y = \cos z = \frac{1}{3} = \cos\alpha \Leftrightarrow x = y = z = \pm\alpha + k2\pi$$

ĐS: GTLN (m) = $\frac{1}{27}$

Bài 213. Đặt $u = \sin x$, $|u| \leq 1$, $v = \text{tg}\, y$

$\Rightarrow v \in R$ với $\forall\, y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Khi đó hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} \sin x - \text{tg}\, y = 0 & (1) \\ \sin^2 x + m\,\text{tg}\, y = m & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ u^2 + mv - m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = u & (3) \\ f(u) = u^2 + mu - m = 0 \\ |u| \leq 1 & (4) \end{cases}$$

Vậy hệ (1), (2) vô nghiệm ⇔ (4) vô nghiệm ⇔

$\Leftrightarrow \Delta_u = m^2 + 4m < 0$

$-4 < m < 0$ (a)

hoặc (4) có nghiệm thoả mãn $\left[\begin{array}{l} 1 < u_1 \leq u_2 \\ u_1 \leq u_2 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(-1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m \geq 0 \\ 1 + m - m > 0 \\ -\dfrac{m}{2} > 1 \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} m^2 + 4m \geq 0 \\ 1 - m - m > 0 \\ -\dfrac{m}{2} < -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \leq -4$ hoặc $m > 2$ (b)

* (a) và (b) ⇒ *ĐS:* $m \leq -4$ hoặc $m > 2$

Bài 214. Đặt $u = \sin x \Rightarrow |u| \leq 1, v = \text{tg}\, y \Rightarrow \in R$ với $\forall y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \sin^2 x + m\,\mathrm{tg}\, y = m & (1) \\ \mathrm{tg}^2 y + m \sin x = m & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + mv = m & (3) \\ v^2 + mu = m & (4) \\ |u| \le 1 & (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + mv = m & (3) \\ (u - v)(u + v - m) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow (I)\begin{cases} u^2 + mV = m & (3) \\ u = v & (6)\text{loại} \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} u^2 + mv = m & (3) \\ u + v - m = 0 & (7) \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

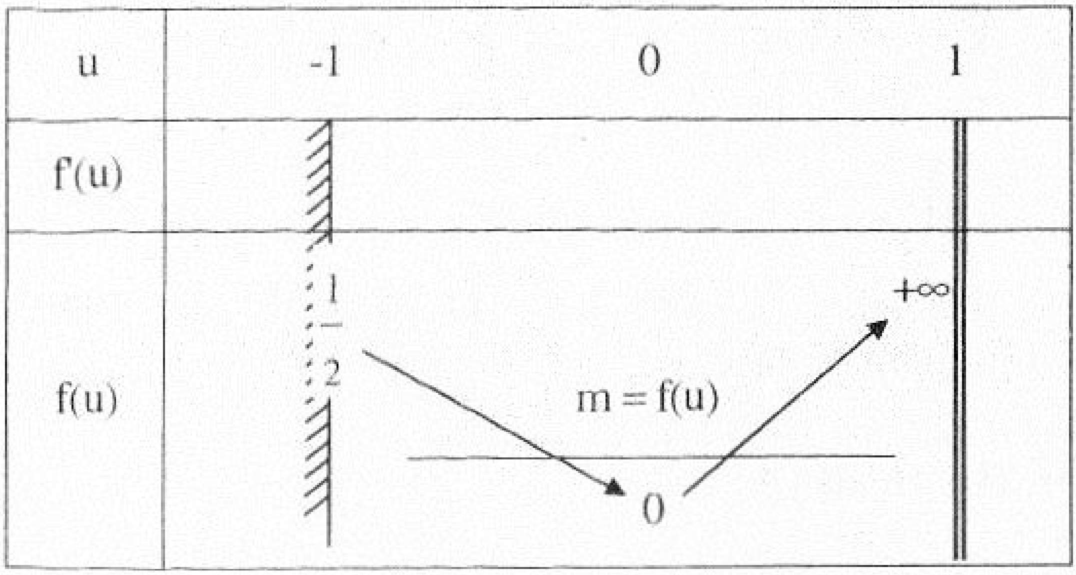
* Xét hệ (I) $\begin{cases} u^2 + mu = m \\ u = v \Rightarrow |u| = |v| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = f(u) = \dfrac{u^2}{1-u}$ (8)

Với $u \neq 1$

+ Nếu u = 1 ⇒ Hệ không thoả mãn ⇒ Xét hàm số

$f(u) = \dfrac{u^2}{1-u}$ trên [-1; 1). Ta có $f'(u) = \dfrac{2u - u^2}{(1-u)^2}$ và có

Bảng biến thiên



$$\lim_{u\to 1^-} f(u) = +\infty \Rightarrow m = f(u) \subset [0;+\infty)$$

Vậy: Hệ (I) $\Rightarrow$ hệ (1), (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 0$ (a)

* Xét hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} v = m - u,\ |u| \leq 1 \\ u^2 - mu + m^2 - m = 0 \quad (9) \end{cases} \Rightarrow$ Điều kiện để

Hệ (II) có nghiệm $\Delta = m(4 - 3m) \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \subset [0,+\infty)$

Vậy Hệ (I) đã cho có nghiệm thì hệ (II) cũng có nghiệm.

ĐS: $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm} \\ m < 0 \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm} \end{array}\right.$

Bài 215. Phương trình đã cho $\begin{cases} \sin|x| + m\cos x = 1 & (1) \\ \log_4(m|x| + 1) = 0 & (2) \end{cases}$ có

* Điều kiện cần: Nếu hệ có nghiệm x_0 thì $(-x_0)$ cũng là nghiệm. Giả sử nghiệm đó là duy nhất $\Rightarrow x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Khi đó $x_0 = 0 \Rightarrow m = 1$. Vậy $m = 1$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

* Điều kiện đủ: Nếu $m = 1 \Rightarrow$ hệ (1), (2) cho:

$$\begin{cases} \sin|x| + \cos x = 1 \Rightarrow 0 + \cos 0 = 1 \text{ thoả mãn} \\ \log_4(|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow |x| + 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất $x_0 = 0$.

- *ĐS:* $m = 1$ là điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm duy nhất nghiệm đó là $x_0 = 0$.

Bài 216. Hệ đã cho $\begin{cases} \sin x + \cos 2x = m & (1) \\ \cos x + \cos 2x = m & (2) \end{cases}$

1) Khi m = 0, hệ (1), (2) trở thành:

$$\begin{cases}\sin x + 2\sin x\cos x = 0\\ \cos x + 2\cos^2 x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = 0 \vee \cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos x = -1 \vee \cos x = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ *ĐS:* $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2) Xác định m để hệ có nghiệm.

$$\text{Hệ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x & (3)\\ m = \cos x + \cos 2x & (4)\end{cases}$$

* Trong đó (3) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

* Với $x = \pi + k2\pi \Rightarrow$ (4) cho $m = 0$ (a)

* Với $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow (4)$ cho

$$m = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Khi } k = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \text{Khi } k = 1 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \text{Khi } k = 2 \Rightarrow m = -1\end{array}\right\} (b) \Rightarrow \text{(a) và (b) cho}$$

ĐS: $m = \left\{0, -1, \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Bài 217. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} x - y = \alpha & (1) \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) & (2) \end{cases}$$

có (2) $\Leftrightarrow 4\cos(x + y)\cos(x - y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \Rightarrow$

Hệ (1), (2) trở thành:

$$\begin{cases} x - y = \alpha & (1) \\ 4\cos(x + y)\cos\alpha = 1 + 4\cos^2\alpha & (3) \end{cases}$$

Vì $|4\cos(x + y)\cos\alpha| \le 4|\cos\alpha| \le 1 + 4\cos^2\alpha$

Dấu "=" khi và chỉ khi $|\cos\alpha| = \frac{1}{2} \Rightarrow$

* Nếu $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (2) cho $\cos(x + y) = 1$

$\Leftrightarrow x + y = k2\pi, k \in Z$

(1) cho $x - y = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} + k\pi \\ y = -\frac{\alpha}{2} + k\pi \end{cases} k \in Z \qquad (a)$$

* Nếu $\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (2) cho $\cos(x + y) = -1$

$\Leftrightarrow (x + y) = (2k + 1)\pi$

(1) cho $x - y = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} + (2k + 1)\frac{\pi}{2} \\ y = -\frac{\alpha}{2} + (2k + 1)\frac{\pi}{2} \end{cases} k \in Z \qquad (b)$$

ĐS: nghiệm của hệ là $\left[\begin{array}{l}(a)\ \text{khi } \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \\ (b)\ \text{khi } \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Bài 218. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \cos 2x + \cos 2y = m & (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} & (3) \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{2-m}{2} & (4)\end{cases}$$

Đặt u = sin x, v = sin y $\Rightarrow |u|, |v| \le 1$ và hệ (3), (4) trở

$$\text{thành} \begin{cases}v = \dfrac{1}{2} - u \quad (5) \Rightarrow -1 \le \dfrac{1}{2} - u \le 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le u \le \dfrac{3}{2} \\ f(u) = 8u^2 - 4u + 2m - 3 = 0 \qquad (6) \\ -\dfrac{1}{2} \le u \le \dfrac{3}{2} \qquad (7)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ (1), (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (5), (6) có nghiệm thoả mãn (7)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(-\dfrac{1}{2}\right).f(1) < 0 \\ \begin{cases}\Delta' \ge 0 \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ -\dfrac{1}{2} < S < 1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow ĐS:\ m \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{4}\right]$$

Bài 219. Hệ phương trình

$$\begin{cases}\log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 & (1) \\ \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha).\log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 & (2)\end{cases}$$

có điều kiện là $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 0 < y \neq 1 \end{cases}$ (3)

* Với $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ kết hợp (3)

có $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha > 0 \\ y\cos\alpha + x\sin\alpha > 0 \end{cases}$

* Từ (1),(2) $\Rightarrow \begin{cases} \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 2 \\ \log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y^2 = y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ (x-y)(x+y-\cos\alpha+\sin\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (I)\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \end{cases} \text{hoặc} (II)\begin{cases} x + y = \cos\alpha - \sin\alpha \\ x^2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \end{cases}$$

1) Giải hệ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ Thế α vào (I), (II) $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow ĐS\text{: } x = y = \sqrt{2}$$

2) Biện luận hệ theo α với $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ Với $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 < \sin\alpha + \cos\alpha < 1$

$\Rightarrow$ *(I)Cho$\left[\begin{array}{l} x = y = 0 \text{ (loại)} \\ x = y = \cos\alpha + \sin\alpha \text{ là nghiệm của hệ (a)} \end{array}\right.$

* (II) cho: + Nếu $\cos\alpha - \sin\alpha \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ (II) vô nghiệm.

+ Nếu $\cos\alpha - \sin\alpha > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

Từ (II) cho $x^2 - (\cos\alpha - \sin\alpha)x - \sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$

có $\Delta = (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 4\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{1}{2}\left[(\cos\alpha - \sin\alpha) - \sqrt{\Delta}\right] < 0$ (loại)

$x_2 = \dfrac{1}{2}\left[(\cos\alpha - \sin\alpha) + \sqrt{\Delta}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2 = \dfrac{1}{2}\left[(\cos\alpha - \sin\alpha) - \sqrt{\Delta}\right] < 0$

$\Rightarrow$ loại. Vậy (II) vô nghiệm (b)

* (a) và (b) $\Rightarrow$ *ĐS:* hệ có nghiệm duy nhất

$$x = y = \sin\alpha + \cos\alpha,\ \forall\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bài 220. Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} \cot g\, x - \cot g\, y = x - y & (1) \\ 5x + 8y = 2\pi & (2) \end{cases}$$

có (1) $\Leftrightarrow$ cotg x - x = cotg y- y (3). Xét hàm số:

$f(t) = \cot g\, t - t \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1 < 0$ với $\forall\, t \in (0, \pi)$

* Kết hợp (3) $\Rightarrow x = y$.

* Thế vào (2) $\Rightarrow$ *ĐS:* $x = y = \dfrac{2\pi}{3}$

Bài 221. Hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| & (1) \\ tg^2 x + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

có điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$ (3)

* Khi đó dễ dàng thấy nếu hệ đã có nghiệm (x_0, y_0) thấy có nghiệm $(-x_0, y_0)$.

* Điều kiện cần: Giả sử hệ (1), (2) có nghiệm duy nhất ⇒ nghiệm có dạng $(0, y_0)$. Khi đó hệ (1), (2) trở thành.

$\begin{cases} a - 1 = y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 0 \end{array}\right.$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

* Điều kiện đủ: + a = 0 ⇒ hệ (1), (2) cho:

$$\begin{cases} y = -1 - |\sin x| \\ tg^2x = 1 - y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z \Rightarrow \text{Có vô số nghiệm} \Rightarrow (\text{loại}) \\ y = -1 \end{cases}$$

+ a = 2 ⇒ có $\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x| \\ tg^2x + y^2 = 1 \end{cases}$

Rõ ràng hệ có một nghiệm (0, 1).

Giả sử còn nghiệm $(x_0, y_0) \neq (0, 1)$ ⇒ có

$y_0^2 = 1 - tg^2x_0 \leq 1 \Rightarrow |y_0| \leq 1 \Rightarrow$

Mặt khác $2x_0^2 = (y_0 - 1) - |\sin x_0| \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow \text{hệ chỉ có 1 nghiêm } (0,1)$$

* Vậy điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm duy nhất là a = 2.

Bài 222.

* Điều kiện cần: hệ đã cho $\begin{cases} \cos x = a\cos^3 y & (1) \\ \sin x = a\sin^3 y & (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = a^2\cos^6 y \\ \sin^2 x = a^2\sin^6 y \end{cases} \Rightarrow 1 = a^2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y\right)$$

Vì $\frac{1}{4} \le 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y \le 1 \Rightarrow 1 \le a^2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le |a| \le 2$

* Điều kiện đủ: Với $1 \le |a| \le 2 \Rightarrow \sin^2 2y = \frac{4a^2 - 4}{3a^2}$ luôn có nghiệm vì $\left|\frac{4a^2 - 4}{3a^2}\right| \le 1$ với $1 \le |a| \le 2 \Rightarrow$ gọi y_0 là 1 nghiệm $\Rightarrow$ hệ $\begin{cases} \cos x = a\cos^3 y_0 \\ \sin x = a\sin^3 y_0 \end{cases}$ có nghiệm x_0

Vì $\left(a\cos^3 y_0\right)^2 + \left(a\sin^3 y_0\right)^2 = 1$

* *ĐS:* $1 \le |a| \le 2$

CHỦ ĐỀ 4

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đẳng thức cơ bản trong tam giác: với $\forall$ k $\in$ Z^+, tam giác ABC bất kỳ $\Rightarrow$

- $\sin kA = (-1)^{k+1} \sin(B + C)$
- $\cos kA = (-1)^{k} \cos(B+C)$
- $\mathrm{tg}\, kA = -\mathrm{tg} k(B + C)$
- $\mathrm{cotg} kA = -\mathrm{cotg}\, k(B + C)$
- $\sin(2k + 1)\dfrac{A}{2} = (-1)^{k} \cos(2k + 1)\dfrac{B+C}{2}$
- $\cos(2k + 1)\dfrac{A}{2} = (-1)^{k} \sin(2k + 1)\dfrac{B+C}{2}$
- $\mathrm{tg}(2k + 1)\dfrac{A}{2} = \mathrm{cotg}(2k + 1)\dfrac{B+C}{2}$
- $\mathrm{cotg}(2k + 1)\dfrac{A}{2} = \mathrm{tg}(2k + 1)\dfrac{B+C}{2}$
- $\sin 2kA + \sin 2kB + \sin 2kC = (-1)^{k+1}.4\sin kA \sin kB \sin kC$
- $\cos 2kA + \cos 2kB + \cos 2kC = (-1)^{k}.4\cos kA \cos kB \cos kC$
- $\sin(2k + 1)A + \sin(2k + 1)B + \sin(2k + 1)C =$

  $= (-1)^{k}.4.\cos(2k + 1)\dfrac{A}{2}.\cos(2k + 1)\dfrac{B}{2}.\cos(2k + 1)\dfrac{C}{2}$
- $\cos(2k + 1)A + \cos(2k + 1)B + \cos(2k + 1)C =$

  $= (-1)^{k}.4\cos(2k + 1)\dfrac{A+B}{2}.\cos(2k + 1)\dfrac{B+C}{2}.$

  $.\cos(2k + 1)\dfrac{C+A}{2} + 1$

- $\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 1 + (-1)^k.\ 2\cos kA.\ \cos kB.\ \cos kC$
- $\text{tg}kA + \text{tg}kB + \text{tg}kC = \text{tg}kA.\text{tg}kB.\text{tg}kC$
- $\text{cotg}kA\text{cotg}kB + \text{cotg}kB\ \text{cotg}kC + \text{cotg}kC\text{cotg}kA = 1$
- $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2} = 1$
- $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$
- $a = 2R\sin A$ • $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ • $\ell_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c}$
- $\text{cotg}A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ • $r = (p - a)\ \text{tg}\dfrac{A}{2}$
- $r_a = p\text{tg}\dfrac{A}{2}$ $= 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$
- $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C = pr$

$$= (p - a)r_a = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

- $a = b\cos C + c\cos B$ (Định lý phép chiếu trong tam giác)

2. Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

- $0 < a \le c \Leftrightarrow 0 < A \le B \le C$
- $a + b > c$
- $|a - b| < c$
- $(a - b)(A - B) \ge 0$

- $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^0$

  $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0$

  $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^0$

- $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ • $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$

- $\sin A.\sin B.\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ • $\cos A.\cos B.\cos C \leq \dfrac{1}{8}$

- $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq 3\sqrt{3}$ (ΔABC nhọn)

- $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3}{2}$

- $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$

- $\text{tg}\dfrac{A}{2} + \text{tg}\dfrac{B}{2} + \text{tg}\dfrac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

- $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C \geq \sqrt{3}$

- $\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \dfrac{9}{4}$ (hay: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \dfrac{3}{4}$)

Dấu "=" trong các công thức khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều.

3. Phương pháp thường dùng để chứng minh đẳng thức lượng giác, tính số trị biểu thức lượng giác:

- Biến đổi tương đương
- Biến đổi một số vế bằng vế kia
- Tổng các đại lượng không âm

4. Phương pháp thường dùng để chứng minh bất đẳng thức trong tam giác

- Biến đổi tương đương
- Bất đẳng thức cổ điển (Côsi, Bu-nhi-a-côp-xki)
- Tam thức bậc 2
- Giải tích
- Tính chất hàm số
- Bất đẳng thức trong tam giác, bất đẳng thức trị số tuyệt đối.

II. ĐỀ BÀI

§1. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A - MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 223. 1. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in R$ ta có

a) $\sin\alpha.\sin(60^0 + \alpha).\sin(60^0 - \alpha) = \dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$

b) $\cos\alpha.\cos(60^0 + \alpha).\cos(60^0 - \alpha) = \dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$

c) $tg\alpha.tg(60^0 + \alpha).tg(60^0 - \alpha) = tg3\alpha$

2. Áp dụng tính

$A = \sin 2^0.\sin 18^0.\sin 22^0.\sin 38^0.\sin 42^0.\sin 58^0.\sin 62^0.\sin 78^0.\sin 82^0$

$B = tg30^0.tg57^0.tg63^0.tg81^0$

Bài 224. 1.Chứng minh rằng:

$$tg(x + y + z) = \frac{tgx + tgy + tgz - tgx.tgy.tgz}{1 - (tgx.tgy + tgy.tgz + tgztgx)}$$

2. Biết rằng $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$, $tg\alpha_3$ là 3 nghiệm của phương trình

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

và $tg\beta_1$, $tg\beta_2$, $tg\beta_3$ là 3 nghiệm của phương trình

$x^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Chứng minh rằng: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = k\pi, k \in Z$

Bài 225. Biết $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{4}$ và tgα, tgβ, tgγ là 3 nghiệm của phương trình: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ (1)

Chứng minh: $p + 1 = q + r$ (2)

Bài 226. Biết $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ và $tg\dfrac{\alpha}{2}, tg\dfrac{\beta}{2}, tg\dfrac{\gamma}{2}$ là 3 nghiệm của phương trình: $x^3 + px^2 + x + q = 0$ (1)

Chứng minh: 1) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (2)

2) $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha.tg\beta.tg\gamma$ (3)

Bài 227. Biết tgα, tgβ là 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

Hãy tính giá trị biểu thức:

$$A = \sin^2(\alpha + \beta) + p.\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + q.\cos^2(\alpha + \beta)$$

theo p, q nếu:

1) $q = 1$ 2) $q \neq 1$

Bài 228. Tính giá trị các biểu thức

$A = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1}$; $B = \sin 32^0.\cos 58^0 + \sin 122^0.\cos 392^0$

- $C = \left(\sin\dfrac{2\pi}{7} - \sin\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}\right)\cot g\dfrac{\pi}{7}$

- $D = \cos^2(60^0 - \alpha) + \cos^2(60^0 + \alpha) + \cos^2\alpha$

- $E_n = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\ldots\ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}}}_{\text{n lần dấu căn thức}}$ với $0 < x < \pi$

Bài 229. 1. Chứng minh đẳng thức:

$$\cot g2x = \frac{1}{2}(\cot gx - tgx)$$

2. Áp dụng tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{\cot g\frac{\pi}{32} - \cot g\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8}}$$

Bài 230. Chứng minh rằng có thể tính diện tích tam giác ABC theo công thức:

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

Với m_a, m_b, m_c là các trung tuyến tam giác đó

Bài 231. Độ dài các cạnh của tam giác ABC là a, b, c thoả mãn hệ thức $\frac{a+b+c}{abc} = \alpha$(1) Chứng minh $R.r.\alpha = 1$ (2)

Bài 232. Chứng minh rằng: r_a, r_b, r_c là 3 nghiệm của phương trình $(x^2 + p^2)(x - r) = 4Rx^2$.

Bài 233. Chứng minh rằng độ dài b, c của hai cạnh của tam giác ABC là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - kx + \frac{1}{4}\left(k^2 - 4m_a^2\right)\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} = 0 \qquad (1)$$

với $k = b + c$ và m_a là trung tuyến xuất phát từ A của tam giác đó.

Bài 234. 1. Độ dài a, b, c các cạnh tam giác ABC theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, hãy chứng minh:

a) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ b) Công sai $d = \frac{3}{2}r\left(\operatorname{tg}\frac{c}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$

2. Ngược lại nếu ΔABC có $\sin A.\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2}$ thì số đo 3 cạnh a, c, b theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Bài 235. Chứng minh rằng nếu số đo 3 góc A, B, C của tam giác ABC theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q = 2 thì: $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$

với a, b, c, R là độ dài 3 cạnh và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Bài 236. Chứng minh rằng nếu M là điểm bất kỳ bên trong tam giác ABC có A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên BC, CA, AB, thì có: $\operatorname{cotg}A\hat{A}_1B + \operatorname{cotg}B\hat{B}_1C + \operatorname{cotg}C\hat{C}_1A = 0$

Bài 237. Gọi D là điểm bất kỳ trên cạnh BC của ΔABC có AD = d, BD = m, CD = n

1. Chứng minh: $ad^2 = mb^2 + nc^2 - a.m.n$

2. Từ đó suy ra các công thức:

a) $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

b) $\ell_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c}$

Bài 238. Tam giác ABC có $\hat{B} > \hat{C}$, AH, AP, AM tương ứng là chiều cao, phân giác trung tuyến của nó và $M\hat{A}P = \alpha$.

Chứng minh:

1. $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\frac{B - C}{2}$

2. PH = PM là điều kiện cần và đủ để $\sin B \sin C = \sin^2 \frac{A}{2}$

Bài 239. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có

$$p^2 + r^2 = 2R\,(h_a + h_b + h_c - 2r)$$

Bài 240. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r + 4R}{p}$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ + ĐH NĂM 2000 VÀ 2001

1. Đẳng thức góc bất kỳ

Bài 241. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tg}30^0 + \operatorname{tg}40^0 + \operatorname{tg}50^0 + \operatorname{tg}60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$$

(Câu III_1 - Đề 14)

Bài 242. Rút gọn không còn dấu căn:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}} \quad \text{với } 0 \le \alpha < 2\pi$$

(Câu II_1 - Đề 27)

Bài 243. Chứng minh nếu

$$\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)} = \frac{a}{b};\ \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} = \frac{A}{B};\ aB + bA \ne 0$$

thì: $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{aA + bB}{aB + bA}$

(Câu III_1 - Đề 29)

Bài 244. Chứng minh rằng: nếu

$m.\sin(a + b) = \cos(a - b)$, trong đó $a - b \neq k\pi$, $k \in Z$ và $m \neq 1$

thì biểu thức $M = \dfrac{1}{1 - m\sin 2a} + \dfrac{1}{1 - m\sin 2b}$ không phụ thuộc a, b.

(Câu III - Đề 66)

Bài 245. Không dùng bảng số, tính giá trị biểu thức

$$A = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$$

(Câu II_2-Đề 68)

Bài 246. Các góc x, y, z thoả mãn điều kiện

$x + y + z = n\pi$, $n \in Z$.

Chứng minh: $\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z - 1 = (-1)^n.2\cos x.\cos y.\cos z$

(Câu III_1 - Đề 78)

Bài 247. Chứng minh rằng nếu

$\cos\varphi = \cos a.\cos b$ với $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq (2n + 1)\pi$, $k, n \in Z$, thì

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi + a}{2}.\operatorname{tg}\frac{\varphi - a}{2} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{b}{2}\right)$$

(Câu II_1 - Đề 128)

Bài 248. Chứng minh

$$8 + 4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{32} = \cot g\,\frac{\pi}{32}$$

(Câu III_2 - ĐHQGHN - B - 2000)

Bài 249

Chứng minh $8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 = 1$

(Câu III_2 - ĐHQGHN - A - 2000 + III_2 -
HV Ngân hàng Hà Nội - A - 2000)

Bài 250.

Chứng minh: $\cos 12^0 + \cos 18^0 - 4\cos 15^0.\cos 21^0.\cos 24^0 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

*(Câu III_2 - ĐHQGHN - A - 2001 + III_2 -
HV Ngân hàng Hà Nội - A - 2001)*

2. Rút gọn, tính giá trị biểu thức lượng giác hoặc yếu tố trong các hình

Bài 251. Chứng minh rằng có thể tính diện tích tam giác bởi công thức:

$$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$$

(Câu III_2 - Đề 3)

Bài 252. Số đo 3 góc ΔABC lập thành một cấp số cộng và thoả mãn đẳng thức: $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

1) Tính các góc A, B, C.
2) Biết nửa chu vi tam giác bằng 50 đơn vị dài, tính các cạnh a, b, c.

(Câu I_1 - Đề 46)

Bài 253. Cho tam giác ABC có CM là trung tuyến và $\widehat{ACM} = \alpha$, $\widehat{BCM} = \beta$

1) Chứng minh $\dfrac{\sin A}{\sin B} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

2) cho α, β, tính các góc A, B, C của tam giác đó

(Câu III_2 - Đề 73)

Bài 254.

Tìm góc $\hat{C}$ của ΔABC biết

$(1 + \text{cotg}A)(1 + \text{cotg}B) = 2$

(Câu II_3 - ĐH Nông nghiệp I - HN - B - 2000)

Bài 255.

Tam giác ABC có:

$tgA.tgB = 3 \quad (1) \quad$ và $tgB.tgC = 6 \qquad (2)$

CMR tam giác đó có một góc bằng 45^0

(Câu II_2 - ĐH Nông nghiệp 1 - HN - A - 2000)

Bài 256. Tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b, c và diện tích S thoả mãn

$$S = (c + a - b)(c + b - a)$$

chứng minh rằng $tg\hat{C} = \frac{8}{15}$

(Câu III_2 - ĐH Thuỷ Lợi HN - 2001)

Bài 257.

Tính các góc của tam giác ABC nếu có

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0$$

(Câu III_2 - ĐHSP HN - B - 2001)

Bài 258.

Tính các góc của tam giác ABC nếu có

$$\cos A = \sin B + \sin C - \frac{3}{2}$$

(Câu III_2 - ĐHSP Kỹ Thuật TPHCM - A - 2001)

Bài 259.

$$\text{Cho} \begin{cases} a + b + c = \frac{\pi}{2} \\ \div \cot ga, \cot gb, \cot gc \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức A = cotga. cotgc

(Câu III_2 - ĐH Hàng hải - 2000)

Bài 260.

Tam giác ABC có

$\cos C.(\sin A + \sin B) = \sin C.\cos(A - B)$

Tính giá trị biểu thức: $M = \cos A + \cos B$

(Câu IV_1 - ĐH Nông nghiệp I - A - 2001)

Bài 261.

Tính giá trị biểu thức

$P = \sin^2 50^0 + \sin^2 70^0 - \cos 50^0.\cos 70^0$

(Câu III_2 - ĐH An Ninh - A - 2001)

Bài 262. Biết $tga + cotga = m$

Tính $tga - cotga$

(Câu 3 - ĐH Y HN - 2001)

3. Đẳng thức về góc trong tam giác

Bài 263. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, $\widehat{AMB} = \alpha$

Chứng minh $\cot g\alpha = \dfrac{\sin(B - C)}{2\sin B \sin C}$

(Câu III_2 - Đề 81)

Bài 264.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

*(Câu III_2 - ĐHQGHN - D và III_2 - HV
Ngân hàng Hà Nội - D - 2000)*

Bài 265.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

(Câu III_2 - HV Quan hệ Quốc tế HN - D - 2000)

Bài 266.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có

$$\left(\mathrm{tg}\frac{A}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}\right)+\left(\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\frac{A}{4}\right)-$$

$$-\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}=1$$

(Câu III - Học viện Quan hệ Quốc tế HN - D - 2001)

Bài 267.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

(Câu III - ĐH Ngoại thương - CS_2 - A + B - 2001)

4. Đẳng thức liên hệ giữa các góc trong tam giác

Bài 268. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh: $$\mathrm{cotg}A+\mathrm{cotg}B+\mathrm{cotg}C=\frac{R\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}$$

(Câu III_1 - Đề 6)

Bài 269. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó. Chứng minh:

1) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

2) $IA.IB.IC=4Rr^2$

(Câu III - Đề 28)

Bài 270.

1) Hãy tìm một điểm M trong ΔABC sao cho

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$$

2) Đặt $\widehat{MAB} = \varphi$ chứng minh hệ thức

$$\cot g\varphi = \cot gA + \cot gB + \cot gC$$

(Câu III - Đề 44)

Bài 271. Chứng minh rằng các tam giác AHB, BHC, CHA có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau (H trực tâm ΔABC).

(Câu II_1 - Đề 52)

Bài 272.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC luôn có:

$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$, với r, R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC.

(Câu II_2 - Đề 111)

Bài 273. Chứng minh rằng mọi tam giác ABC luôn có:

$$(a - b)\cot g\frac{C}{2} + (b - c)\cot g\frac{A}{2} + (c - a)\cot g\frac{B}{2} = 0$$

(Câu II_1 - Đề 125)

Bài 274. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và diện tích S. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. Tam giác A'B'C' có độ dài các cạnh là a', b', c' và diện tích S'. Chứng minh:

1) $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$

2) $\frac{S'}{S} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(Câu II - Đề 139)

Bài 275. ABCD là một tứ giác nội tiếp có các cạnh AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

(Câu II_2 - Đề 128)

Bài 276.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$, chứng minh:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S_{\Delta ABC}}$$

(Câu III_2 - ĐH ngoại Thương HN - D - 2000)

5. Đẳng thức có điều kiện trong tam giác

Bài 277. Chứng minh rằng hai trung tuyến AA', BB' của ΔABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\operatorname{cotg}C = 2(\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B)$$

(Câu II_2 - Đề 4)

Bài 278. Tam giác ABC có các trung tuyến m_b, m_c thoả mãn $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ chứng minh rằng:

$$2\operatorname{cotg}A = \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$$

(Câu II_2 - Đề 104)

Bài 279. Tam giác ABC có số đo 3 góc A, B, C lập thành một cấp số nhân công bội q = 2. chứng minh các hệ thức:

1) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 2) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}$

(Câu III_2 - Đề 107 + 137)

Bài 280. Tam giác ABC có $\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$. Chứng minh $c=\frac{1}{2}(a+b)$.

(Câu III_2 - Đề 47)

Bài 281. Chứng tỏ rằng trong tam giác ABC, $\hat{A}=2\hat{B}$ là điều kiện cần và đủ để $a^2=b^2+bc$

(Câu II_2 - Đề 64)

Bài 282. Tam giác ABC có $\hat{A}$ = 1v, BC = a, tích các độ dài hai đường phân giác $l_b.l_c=l^2$.

a) Chứng minh $\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}=\frac{l^2}{4a^2}$

b) Chứng minh $IB.IC=\frac{l^2}{2}$(I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

(Câu II_2 - Đề 76)

Bài 283. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có:

$$5\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1 \text{ thì có } 3c=2(a+b)$$

(Câu IV_2 - ĐH Cần Thơ - D - 2000)

Bài 284.

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ÷ cotgA, cotgB, cotgC thì có ÷ a^2, b^2, c^2

(Câu III_1 - ĐH Thương Mại - 2000)

Bài 285.

Tam giác ABC có AB = AC = b, BC = a, đường tròn nội tiếp đi qua trung điểm E của đường cao AH. Chứng minh:

$3a = 2b$ và tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC theo a.

(Câu III$_2$ - HVKTQS - 2001)

Bài 286.

Biết rằng ΔABC có đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác và tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác đó và vuông góc với đường phân giác trong của góc $\hat{C}$.

Chứng minh, khi đó ΔABC có hệ thức:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

(Câu III$_2$ - ĐH Cảnh sát - A - 2000)

§2. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 287. Chứng minh:

$$\frac{tg^2x+3}{\sqrt{tg^2x+2}} > 2$$

Bài 288. Chứng minh:

$$\left|\frac{(tga+tgb)(1-tgatgb)}{(1+tg^2a)(1+tg^2b)}\right| \le \frac{1}{2}$$

Bài 289. Chứng minh: $|\sin nx| \le n|\sin x|$ với $\forall n \in Z^+$

Bài 290. Chứng minh:

$$|\sin x(\sin a + \cos a) + \cos x(\sin a - \cos a)| \le \sqrt{2}$$

Bài 291. Chứng minh: Nếu ΔABC có độ dài các cạnh thoả mãn : $a \ge c$, $b \ge c$ thì:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$$

Bài 292. Chứng minh: $\forall\Delta ABC$ có:

$$12 + 8(tg^2A + tg^2B + tg^2C) + 4(tg^2A\,tg^2B + tg^2B\,tg^2C + tg^2C\,tg^2A) \geq 3(1 + tg^2A)(1 + tg^2B)(1 + tg^2C)$$

Bài 293. Chứng minh:

$$\sin 3a + 5\sin a - \cos 2a + \frac{115}{27} \geq 0. \text{ Với } \forall a \in R$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ + ĐH NĂM 2000, 2001

I. Phương pháp biến đổi tương đương

Bài 294.

Chứng minh rằng ΔABC có 3 góc đều nhọn khi và chỉ khi: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$

(Câu III_2 - Đề 18)

Bài 295.

Tìm số k lớn nhất để trong mọi ΔABC luôn có:

$$\sin^2A + \sin^2B > k\sin^2C$$

(Câu II_2 - Đề 17)

Bài 296. Chứng minh rằng:

$$4\sin 3\alpha + 5 \geq 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha,\ \forall\alpha$$

(Câu III_1 - Đề 142)

Bài 297. Chứng minh rằng nếu ΔABC có:

$$2A + 3B = \pi \text{ thì có } a + b \leq \frac{5}{4}C$$

(Câu IV - Đề 139)

Bài 298.

Chứng minh rằng trong mọi ΔABC luôn có:

a) $\sin\frac{A}{2} \geq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ b) $\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}$

(Câu II_2 - Đề 149)

Bài 299.

Chứng minh rằng trong mọi ΔABC luôn có:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\geq 6$$

(Câu III_2 - ĐHSP Vinh - D - 2000)

Bài 300.

Chứng minh rằng trong mọi ΔABC nhọn có:

$$\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C\geq \text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}$$

(Câu III_2 - ĐH Cảnh sát nhân dân - 2000)

Bài 301.

Cho $x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, chứng minh: $\left|\frac{\text{tg}x-\text{tg}y}{1-\text{tg}x\text{tg}y}\right|<1$

III_2 - ĐH Hàng hải - A - 2001.

2. Phương pháp bất đẳng thức cổ điển (Cô si, B.C.S)

Bài 302.

Chứng minh: $\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C\geq 3\sqrt{3}$ với ΔABC nhọn

(Câu II_2 - Đề 88)

Bài 303.

1) Chứng minh rằng trong mọi ΔABC nhọn ta có:

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Dấu "=" khi nào?

2) Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có:

$$\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)\left(1+\frac{1}{\cos B}\right)\left(1+\frac{1}{\cos C}\right)\geq 27$$

(Câu III - Đề 118)

Bài 304.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC có:

$$\cos A.\cos B.\cos C \leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(Câu III_2 - ĐHSPHN2 -A - 2000)

Bài 305.

Chứng minh rằng trong mọi ΔABC có:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\geq 27$$

(Câu IV_2 - ĐHSP TP.HCM - A + B - 2000)

3. Phương pháp tam thức

Bài 306.

Chứng minh rằng với $\forall x$, $\forall \Delta ABC$ luôn có:

$$1+\frac{x^2}{2}\geq \cos A + (\cos B + \cos C)x$$

(Câu II_1 - Đề 2)

Bài 307.

Chứng minh rằng $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$

(Câu II_2 - Đại học Ngoại ngữ Hà Nội - 2001)

4. Phương pháp giải tích

Bài 309. Chứng minh rằng:

$$2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} > 2^{x+1} \quad \text{với } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(Câu II_2 - Đề 78)

Bài 310. Chứng minh rằng:

$$2^{2\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} > 2^{\frac{3x}{2}+1} \quad \text{với } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(Câu III_2 - Đề 113)

Bài 311.

Cho ΔABC có $0^0 < A \le B \le C < 90^0$

CMR: $$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2$$

(Câu 4 - ĐH Mỏ - Địa chất - 2001)

5. Phương pháp tính chất hàm số

Bài 312.

1) Chứng minh rằng nếu $0 \le x, y, z \le \pi$ thì có

a) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\dfrac{x+y}{2}$

b) $\dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \le \sin\dfrac{x+y+z}{3}$

2) Xử dụng kết quả trên, chứng minh:

a) $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \le \dfrac{1}{8}$

b) $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \le \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

(Câu II - Đề 120)

Bài 313. Chứng minh rằng nếu ΔABC không có góc tù thì :
$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$

(Câu II_2 - Đề 129)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 223. 1a. Đẳng thức phải chứng minh

$$\sin\alpha.\sin(60^0 + \alpha).\sin(60^0 - \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha \qquad \text{(a)}$$

Có vế trái $= \sin\alpha.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$

$$= \sin\alpha.\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^3\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha = \text{Vế phải (a)}$$

- 1b - Tương tự
- 1c - Đẳng thức phải chứng minh

$$\text{tg}\alpha.\text{tg}(60^0 + \alpha).\text{tg}(60^0 - \alpha) = \text{tg}3\alpha \qquad \text{(c)}$$

có + Vế trái $= \text{tg}\alpha.\frac{\text{tg}60^0 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}60^0.\text{tg}\alpha}.\frac{\text{tg}60^0 - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}60^0.\text{tg}\alpha} = \text{tg}\alpha.\frac{3 - \text{tg}^2\alpha}{1 - 3\text{tg}\alpha}$

+ Vế phải $= \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}2\alpha}{1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}2\alpha} = \left(\text{tg}\alpha + \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}\right):\left(1 - \text{tg}\alpha\frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}\right)$

$$= \text{tg}\alpha.\frac{3 - \text{tg}^2\alpha}{1 - 3\text{tg}^2\alpha}$$

+ So sánh 2 kết quả, có (c).

2. $A = \frac{1}{64}\sin 6^0.\sin 66^0.\sin 54^0 = \frac{1}{256}\sin 18^0$

Trong đó: Vì $\cos 54^0 = \sin 36^0 \Leftrightarrow 4\cos^2 18^0 - 3 = 2\sin 18^0$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^0 = 2\sin 18^0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$

- $B = tg9^0.tg81^0 = 1$

Bài 224. 1. Đẳng thức phải chứng minh

$$tg(x + y + z) = \frac{tgx + tgy + tgz - tgx.tgy.tgz}{1 - (tgx.tgy + tgy.tgz + tgz.tgx)} \quad (1)$$

$$\text{Có vế trái} = \frac{tg(x+y) + tgz}{1 - tg(x+y)tgz} =$$

$$= \left(\frac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy} + tgz\right) : \left(1 - tg\frac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy}\right)$$

$$= \frac{tgx + tgy + tgz - tgx.tgy.tgz}{1 - (tgx.tgy + tgy.tgz + tgz.tgx)} = \text{Vế phải (1)}$$

2. Để chứng minh: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = k\pi,\ k \in Z$ (2)

- hãy xét $tg(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ với giả thiết $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$, $tg\alpha_3$ là 3 nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (3)

Áp dụng (1) và định lý Viét đối với (3):

$$tg\alpha_1 + tg\alpha_2 + tg\alpha_3 = -a$$

$$tg\alpha_1.tg\,\alpha_2 + tg\alpha_2.tg\alpha_3 + tg\alpha_3.tg\alpha_1 = b$$

$\operatorname{tg}\alpha_1 . \operatorname{tg}\alpha_2 . \operatorname{tg}\alpha_3 = -c$

$$\left.\begin{aligned}&\text{Ta có} \quad \operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \frac{c-a}{1-b}\\ &\text{Tương tự} \quad \operatorname{tg}(\beta_1+\beta_2+\beta_3) = \frac{a-c}{1-b}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = -\operatorname{tg}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$

Suy ra: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3 = k\pi,\ k \in Z$

Bài 225. Để chứng minh: $p + 1 = q + r$ (2) với:

$\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$ và $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma$ là 3 nghiệm của phương trình

$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (1)$

ta áp dụng kết quả (1) của bài 224 và định lý Viét với phương trình (1) trong bài

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{-p+r}{1-q} \Rightarrow p+1 = q+r$$

Bài 226. 1. Để chứng minh $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ (2) với giả thiết

$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ và $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}, \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ là 3 nghiệm của phương trình: $\quad x^3 + px^2 + x + q = 0$ (1)

Ta áp dụng định lý Viét với (1): $\Rightarrow$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) = 1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Vì tg của góc nhọn luôn > 0

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}} = \cot g\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + k2\pi,\ k \in Z$ (a)

Do $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi \Rightarrow 0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ (b)

(a) và (b) $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$

2. Ta có $\alpha = \pi - (\beta + \gamma) \Rightarrow tg\alpha = -tg(\beta + \gamma) = \dfrac{tg\beta + tg\gamma}{tg\beta tg\gamma - 1}$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh (3):

$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha.tg\beta.tg\gamma$

* Vậy trong tam giác ABC không vuông luôn có

$tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

Bài 227. Giá trị biểu thức

$$A = \sin^2(\alpha + \beta) + p.\sin(\alpha + \beta).\cos(\alpha + \beta) + q.\cos^2(\alpha + \beta)$$

Với $tg\alpha$, $tg\beta$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ (1)

1. *Khi q = 1*: Áp dụng định lý Viét cho (1) $\Rightarrow$

$tg\alpha.\ tg\beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 0$

và $\sin^2(\alpha + \beta) = 1 = q \Rightarrow A = q$

2. *Khi q ≠ 1*: Theo chứng minh 1 $\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \neq 0 \Rightarrow$ có:

$$A = \cos^2(\alpha + \beta)\left[tg^2(\alpha+\beta) + ptg(\alpha+\beta) + q\right] =$$

$$= \frac{1}{1 + tg^2(\alpha+\beta)}\left[tg^2(\alpha+\beta) + ptg(\alpha+\beta) + q\right] \quad (a)$$

- Áp dụng định lý Viét với (1) $\Rightarrow tg(\alpha + \beta) = \dfrac{p}{q-1}$ (b)

Từ (a) và (b) $\Rightarrow A = q$

Bài 228.

- $A = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\cos^6 a + \sin^6 a - 1} = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^2 a + \cos^2 a)^2}{\cos^6 a + \sin^6 a - (\sin^2 a + \cos^2 a)^3} = \ldots = \dfrac{2}{3}$

- $B = \sin 32^0.\cos 58^0 + \sin 122^0.\cos 392^0 = \sin^2 32^0 + \cos^2 32^0 = 1$

- $C = \left(\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}\right).\cot g\frac{\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi + \sin\frac{5\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\right).\mathrm{cotg}\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

- $D = \cos^2(60^0 - \alpha) + \cos^2(60^0 + \alpha) + \cos^2\alpha$

$$= \frac{1 + \cos(120^0 - 2\alpha)}{2} + \frac{1 + \cos(120^0 + \alpha)}{2} + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(2.\cos 120^0.\cos 2\alpha + \cos 2\alpha\right) = \frac{3}{2}$$

- Để tính $E_n = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{.....+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}}}_{\text{n lần dấu căn}}$ Với $0<x<\pi$

ta sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp

+ Với n = 1 có $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x} = \sqrt{\frac{1}{2}.2\cos^2\frac{x}{2}} = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$

Vì $0 < x < \pi \Rightarrow \cos\frac{x}{2} > 0 \quad \Rightarrow E_1 = \cos\frac{x}{2^1}$

+ Giả sử đúng với n = k , tức là:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{....+\frac{1}{2}\sqrt{.....+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}}_{\text{k lần dấu căn}} = \cos\frac{x}{2^k}$$

+ Chứng minh đúng đến n = k + 1. Ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2n}}=\sqrt{\cos^2\frac{x}{2^{k+1}}}=\cos\frac{x}{2^{k+1}}$$

+ Vậy $E_n=\cos\dfrac{x}{2n}$

Bài 229. 1. Đẳng thức phải chứng minh

$\cot g2x=\dfrac{1}{2}(\cot gx-\mathrm{tg}x)$ (1) có

• Vế phải $=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}$ = vế trái

• Cách khác: Vế trái $=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2x}{2\mathrm{tg}x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}-\mathrm{tg}x\right)=$

$=\dfrac{1}{2}(\cot gx-\mathrm{tg}x)$ = vế phải

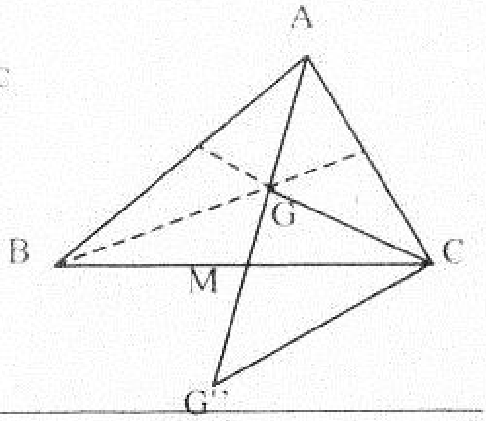
2. Biểu thức $A=\dfrac{\cot g\dfrac{\pi}{32}-\cot g\dfrac{\pi}{16}}{\cos\dfrac{\pi}{16}.\cos\dfrac{\pi}{8}}$ có

$$\cot g\frac{\pi}{32}-\cot g\frac{\pi}{16}=\cot g\frac{\pi}{32}-\frac{1}{2}\left(\cot g\frac{\pi}{32}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{32}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cot g\frac{\pi}{32}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{32}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{32}.\cos\frac{\pi}{32}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{16}}$$

Vậy $A=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{16}.\cos\dfrac{\pi}{16}.\cos\dfrac{\pi}{8}}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{8}.\cos\dfrac{\pi}{8}}=\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$

Bài 230. Kéo dài AG một đoạn GG' = AG⇒ CG' = $\frac{2}{3}m_b$.



Dễ thấy $dt_{\Delta CGG'} = dt_{\Delta GBC} = \frac{1}{3}dt_{\Delta ABC}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3dt_{\Delta CGG'}$

$$p_{\Delta CGG'} = \frac{\frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c)}{2} \Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{\frac{m_a+m_b+m_c}{3}\left(\frac{m_a+m_b+m_c}{3}-GG\right)\left(\frac{m_a+m_b+m_c}{3}-GC\right)\left(\frac{m_a+m_b+m_c}{3}-CG\right)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c).(m_a+m_b-m_c).(m_b+m_c-m_a).(m_c+m_a-m_b)}$$

Bài 231. Đẳng thức phải chứng minh: $R\ .\ r.\ \alpha = \frac{1}{2}$ (2)

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{4S}.\frac{\alpha S}{p} = 1 \quad \Leftrightarrow \frac{abc}{2(a+b+c)}.\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{2}$$

Bài 232. Nếu r_a, r_b, r_c là nghiệm của phương trình

$(x^2 + p^2)\ (x - r) = 4Rx^2$ (1)

$\Rightarrow$ Vế trái (1) = $(r_a^2 + p^2)\ (r_a - r)$

$$= \left(p^2tg^2\frac{A}{2} + p^2\right)\left[ptg\frac{A}{2} - (p-a)tg\frac{A}{2}\right]$$

$$= p^2\left(1 + tg^2\frac{A}{2}\right).atg\frac{A}{2} = p^2\frac{4R.\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= 4R\left(ptg\frac{A}{2}\right)^2 = 4R.r_a^2 = \text{Vế phải} \quad (1)$$

Tương tự với r_b, r_c

Vậy r_a, r_b, r_c là 3 nghiệm của phương trình (1)

Bài 233. Chứng minh b, c là 2 nghiệm của phương trình

$$x^2 - kx + \frac{1}{4}(k^2 - 4m_a^2).\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} = 0 \qquad (1)$$

tương đương với chứng minh:

$$\begin{cases} b + c = k & (2) \\ bc = \dfrac{1}{4}\left(k^2 - 4m_a^2\right)\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} & (3) \end{cases}$$

Theo giả thiết, chỉ còn chứng minh (3). Ta có:

$$\text{Vế phải (3)} = \frac{1}{4}[(b + c)^2 - (2b^2 + 2c^2 - a^2)].\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}[a^2 - (b - c)^2]\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}[a^2 - (b - c)^2]\frac{2}{1 - \cos A}$$

$$= \frac{1}{2}[a^2 - (b - c)^2].\frac{1}{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \ldots = bc$$

= Vế phải (3)

Bài 234. • 1/a: Nếu có ÷ a, b, c ⇔ 2b + a + c

$\Leftrightarrow$ 2sinB = sinA + sinC

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A - C}{2} = \cos\frac{A + C}{2} \quad \Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$ có (1a): $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

- 1/b- Ta phải chứng minh công sai d của ÷ a, b, c có giá trị

$$\frac{3}{2}r\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

Ta có: $\frac{3}{2}r\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) = \frac{3}{2}4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$$= 6R.\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\cos\frac{C+A}{2}.\sin\frac{C-A}{2}$$

$$= R(\sin C - \sin A) = \frac{c-a}{2} = d$$

2. Giả thiết $\sin A\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{ab}{4R^2} = \frac{3\sin^2 C}{2(1+\cos C)}$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{4R^2} = \frac{3abc^2}{4R^2\left[(a+b)^2 - c^2\right]} \Leftrightarrow (a+b)^2 = 4c^2$$

$\Leftrightarrow a + b = 2c \Leftrightarrow$ ÷a, c, b

Bài 235.

$$\text{Vì } \left.\begin{matrix}\text{∺ } A, B, C \\ q = 2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2A \\ C = 4A\end{cases} \Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{7},\ \hat{B} = \frac{2\pi}{7},\ \hat{C} = \frac{4\pi}{7} \Rightarrow$$

Đẳng thức phải chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$ (1) có

$$\text{Vế trái (1) } = 4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= 2R^2\left[3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)\right] \quad \text{(a)}$$

(Chú ý $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$)

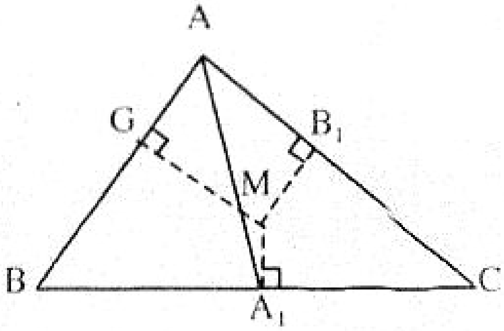
Trong đó A= $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}\text{ (b)}$$

(a) và (b) $\Rightarrow a^2+b^2+c^2=7R^2$

Bài 236. Xét tam giác AA_1B



$$\text{cotg}A\hat{A}_1B=\frac{AA_1^2+BA_1^2-AB^2}{4S_{\Delta AA_1B}}$$

$$\text{cotg}A\hat{A}_1C=\frac{AA_1^2+A_1C-AC^2}{4S_{\Delta AA_1C}}$$

Vì $\text{cotg}A\hat{A}_1B=-\text{cotg}A\hat{A}_1C$

$$\Rightarrow \text{cotg}A\hat{A}_1B=\frac{AA_1^2+BA_1^2-AB^2}{4S_{\Delta AA_1B}}=\frac{AC^2-AA_1^2-A_1C}{4S_{\Delta AA_1C}}$$

$$\text{cotg}A\hat{A}_1B=\frac{BA_1^2-CA_1^2+AC^2-AB^2}{4S_{\Delta ABC}}$$ (a) (Tính chất dãy tỉ lệ thức).

- Áp dụng định lý Pitago trong các tam giác vuông MA_1B, MA_1C có:

$$BA_1^2-CA_1^2=(BM^2-MA_1^2)-(CM^2-MA_1^2)=BM^2-CM^2\quad\text{(b)}$$

- (a) và (b) $\Rightarrow \text{cotg}A\hat{A}_1B=\dfrac{AC^2-AB^2+BM^2-CM^2}{4S_{\Delta ABC}}$ (1)

Tương tự $\quad \text{cotg}B\hat{B}_1C = \dfrac{BA^2 - BC^2 + CM^2 - AM^2}{4S_{\Delta ABC}}$ (2)

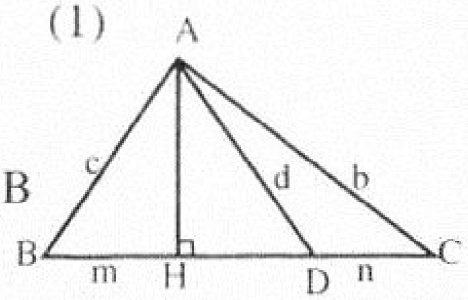
$$\text{cotg}C\hat{C}_1A = \frac{CB^2 - CA^2 + AM^2 - BM^2}{4S_{\Delta ABC}} \quad (3)$$

- Cộng vế với vế (1), (2), (3) ⇒

$$\Rightarrow \text{cotg}A\hat{A}_1B + \text{cotg}B\hat{B}_1C + \text{cotg}C\hat{C}_1A = 0$$

Bài 237. 1. Chứng minh hệ thức

$ad^2 = mb^2 + nc^2 - amn$ (1)



- Áp dụng định lý hàm số cos trong

ΔABD có: $c^2 = d^2 + m^2 - 2m.d.\cos A\hat{D}B$

$= d^2 + m^2 - 2m.HD$

$\Rightarrow \quad nc^2 = nd^2 + nm^2 - 2m.n.HD$ (a)

ΔACD có: $b^2 = d^2 + n^2 - 2nd.\cos A\hat{D}C$

$\Rightarrow \quad mb^2 = md^2 + mn^2 + 2m.n.HD$ (b)

- (a) và (b) ⇒ $nc^2 + mb^2 = (m + n)d^2 + mn(m + n)$ ⇒ có đẳng thức (1)

2. Từ (1) suy ra:

a) $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

Khi D là trung điểm BC ⇒ $m = n = \dfrac{a}{2}$, $d = m_a$ ⇒ thay vào (1) có: công thức a) Về trung tuyến

$$\text{b) } l_a = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b + c}$$

Khi AD là phân giác ⇒ có

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} \Leftrightarrow \frac{m}{c} = \frac{m+n}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow m \ \frac{ac}{b+c}$$

Cũng có $\frac{n}{b} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow \frac{n}{b} = \frac{m+n}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow n = \frac{ab}{b+c}$

- Vậy (1) trở thành: $a.l_a^2 = \frac{ac}{b+c}.b^2 + \frac{ab}{b+c}c^2 - a.\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

$$\Rightarrow l_a^2 = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} = \frac{2(bc)^2}{(b+c)^2}.\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \quad (c)$$

Mặt khác:

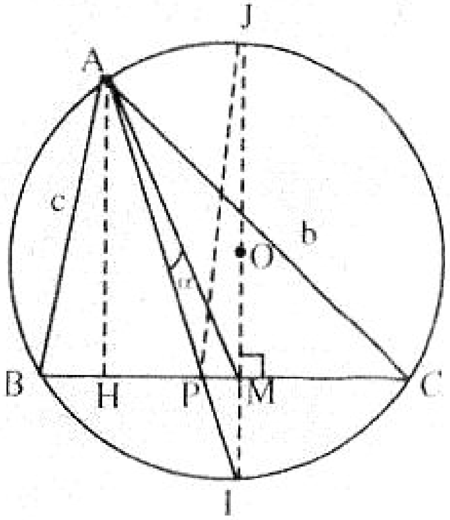
$$\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{2bc} = 1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} \quad (d)$$

- Thay (d) vào (c) có: $l_a^2 = \left(\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\right)^2$

⇒ công thức (b) vẽ phân giác.

Bài 238. 1. Chứng minh đẳng thức

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\alpha.\ \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}$$



Vì MB = MC ⇒

$$S_{\Delta AMB} = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}c.AM\sin B\hat{A}M$$

$$= \frac{1}{2}b.AM.\sin C\hat{A}M$$

$$\Rightarrow c.\sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right) = b.\sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin C.\sin\left(\frac{A}{2}+\alpha\right) = \sin B.\sin\left(\frac{A}{2}-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\alpha(\sin B - \sin C) = \cos\frac{A}{2}\sin\alpha(\sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha.\sin^2\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2} = \sin\alpha.\cos^2\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} \quad (*)$$

chia 2 vế của (*) cho $\cos\alpha.\cos^2\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}$ ta có:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} = \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\frac{B-C}{2}$$

* Cách khác: Chứng minh bằng hình học

- Kéo dài OM cắt đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC tại I, J. Ta có:

$\widehat{BOI} = \widehat{COI} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI} \Rightarrow$ AI qua P $\Rightarrow \widehat{IJC} = \widehat{PAC} = \frac{\hat{A}}{2}$

- Tứ giác APMJ có $\hat{M} = \hat{A} = 1V \Rightarrow$ nội tiếp được $\Rightarrow$ góc nội tiếp $\widehat{PJM} = \alpha$.

- $$\left.\begin{array}{ll} \Delta APC \text{ có góc ngoài} & \widehat{CPI} = \widehat{PAC} + \widehat{PCA} = \frac{A}{2} + C \\ \Delta APB \text{ có} & \widehat{APB}\ (=\widehat{CPI}) = 180^0 - \left(\frac{A}{2} + B\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\widehat{CPI} = 180^0 + C - B \Leftrightarrow \widehat{CPI} = 90^0 + \frac{C-B}{2} \Rightarrow \widehat{MIP} = \frac{B-C}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{cotg}\,\widehat{MIP} = \mathrm{cotg}\frac{B-C}{2} = \frac{IM}{PM}\text{; còn } \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\widehat{MJP} = \frac{PM}{MJ}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\frac{B-C}{2} = \frac{MI}{MJ} \qquad (a)$$

- Mặt khác, Δ vuông ICJ có $\left.\begin{array}{l} IC^2 = MI.IJ \\ IC^2 = MJ.IJ \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left(\frac{IC}{JC}\right)^2 = tg^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{MI\ .\ IJ}{MJ\ .\ IJ} = \frac{MI}{MJ} \quad (b)$$

- (a) và (b) $\Rightarrow tg^2\frac{A}{2} = tg\alpha\ .\ cotg\frac{B-C}{2}$

2. Chứng minh: PH = PM là điều kiện cần và đủ để $\sin B\sin C = \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$.

Sử dụng phương pháp chứng minh tương đương

- $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow$ P nằm trong đoạn HM

$$\text{Vì } \left.\begin{array}{l} \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B} \\ \dfrac{CP}{AP} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin C} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \sin B.\sin C \Leftrightarrow AP^2 = BP.CP \ (1)$$

- Mặt khác $\wp_{P/(O)} = BP.CP = AP.PI \quad (2)$
- (1) và (2) $\Rightarrow \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \sin B.\sin C \Leftrightarrow AP^2 = AP.PI$

$\Leftrightarrow AP = PI \ (3)$

- Δ vuông AHP đồng dạng Δ vuông IMP (4)
- Vậy (3) và (4) $\Rightarrow \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \sin B.\sin C \Leftrightarrow HP = PM$

Bài 239. Đẳng thức phải chứng minh

$$p^2 + r^2 = 2R(h_a + h_b + h_c - 2r) \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4rR$$

$$= 2R(h_a + h_b + h_c)$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4rR = 2R\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}\right) = \frac{2R}{abc}(ab + bc + ca).2.\frac{abc}{4R}$$

$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4rR = ab + bc + ca$ (1). Vậy ta chứng minh (1).

Vì $$\frac{a}{2R} = \sin A = \frac{2\text{tg}\dfrac{A}{2}}{1 + \text{tg}^2\left(\dfrac{A}{2}\right)} = \left(2.\frac{r}{p-a}\right):\left[1 + \frac{r^2}{(p-a)^2}\right] =$$

$$= \frac{2r(p-a)}{r^2 + (p-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow a(r^2 + p^2 + a^2 - 2ap) = 4rRp - 4rRa$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)a - 4rRp = 0 \qquad (2)$$

Vậy a là một nghiệm của phương trình:

$$X^3 - 2pX^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)X - 4rRp = 0 \qquad (3)$$

Chứng minh tương tự cho b, c (a, b, c bình đẳng!).

Áp dụng định lý Viét cho (3) ta có:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4rR \qquad (1)$$

hay $p^2 + r^2 = 2R(h_a + h_b + h_c - 2r)$

Bài 240. Đẳng thức phải chứng minh

$$\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{r + 4R}{p}$$

Có vế trái $$= \frac{1}{2}\left[\left(\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\right) + \left(\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right) + \left(\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}} + \frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} + \frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{4}\,\frac{3 + (\cos A + \cos B + \cos C)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$= \frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\frac{1}{R}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} = \frac{4R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{p}$$

Vậy $\quad \mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}$

Bài 241. Đẳng thức phải chứng minh

$$\mathrm{tg}30^0 + \mathrm{tg}40^0 + \mathrm{tg}50^0 + \mathrm{tg}60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$$

Có vế trái $= \dfrac{1}{\cos 30^0.\cos 60^0} + \dfrac{1}{\cos 40^0.\cos 50^0} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\cos 10^0}$

$$= \frac{4\cos 10^0 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\cos 10^0} = \frac{4(\cos 10^0 + \cos 30^0)}{\sqrt{3}.\cos 10^0} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}.\cos 20^0 = \text{Vế phải}$$

Bài 242. Tương tự bài E_n/228; ta có

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}} = \sqrt{2 + 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)},\ \alpha \in [0,\ \pi] \\ \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)},\ \alpha \in [\pi,\ 2\pi] \end{array}\right.$$

$$= \ldots = \left[\begin{array}{l} 2\cos\dfrac{\alpha}{4} \quad \text{với } \alpha \in [0,\ \pi] \\ 2\sin\dfrac{\alpha}{4} \quad \text{với } \alpha \in [\pi,\ 2\pi] \end{array}\right.$$

Bài 243.

Với $\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \dfrac{a}{b},\ \dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \dfrac{A}{B},\ aB + bA \neq 0$

thì đẳng thức phải chứng minh $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{aA + bB}{aB + bA}$

Có vế phải $= \dfrac{aA + bB}{bB} : \dfrac{aB + bA}{bB} = \left(\dfrac{a}{b}.\dfrac{A}{B} + 1\right) : \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{A}{B}\right)$

$$= \frac{\sin(x-\alpha).\cos(x-\alpha) + \sin(x-\beta) + \cos(x-\beta)}{\sin(x-\alpha).\cos(x-\beta) + \sin(x-\beta).\cos(x-\alpha)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}2\sin[2x-(\alpha+\beta)].\cos(\beta-\alpha)}{\sin[2x-(\alpha+\beta)]} = \cos(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{aA + bB}{aB + bA} = \cos(\alpha-\beta)$$

Bài 244. Quy đồng mẫu số biểu thức M, sử dụng giả thiết để rút gọn ta có:

ĐS: $M = \dfrac{2}{1-m^2}$

Bài 245. Nhân cả tử số và mẫu số của biểu thức A với $\sin\dfrac{\pi}{7}$, biến tích thành tổng, rút gọn có:

ĐS: $A = \dfrac{1}{2}$

Bài 246. Đẳng thức phải chứng minh

$$\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z - 1 = (-1)^n . 2\cos x\cos y\cos z$$

Có vế trái $= \cos2x + \cos2y + \cos^2z = \cos(x + y)\cos(x - y) + \cos^2z$

$$= \cos(n\pi - z).\cos(x - y) + \cos[n\pi - (x + y)].\cos z$$

$$= (-1)^n.\cos z[(x + y) + \cos(x - y)] =$$

$$= (-1)^n.2.\cos x\cos y\cos sz = \text{Vế phải}$$

Bài 247. Đẳng thức phải chứng minh

$$\text{tg}\frac{\varphi + a}{2}.\text{tg}\frac{\varphi - a}{2} = \text{tg}^2\left(\frac{b}{2}\right)$$

Với $\cos\varphi = \cos a\cos b$, $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq (2n + 1)\pi$, $k, n \in Z$ có

$$\text{Vế trái} = \frac{\cos a - \cos\varphi}{\cos a + \cos\varphi} = \frac{\cos a(1 - \cos b)}{\cos a(1 + \cos b)} = \text{tg}^2\left(\frac{b}{2}\right) = \text{Vế phải}$$

Bài 248.

Vì $2\text{cotg}2x = \text{cotg}x - \text{tg}x$ (xem 1/bài 229) $\Rightarrow$ Đẳng thức phải chứng minh:

$$8 + 4\text{tg}\frac{\pi}{8} + 2\text{tg}\frac{\pi}{16} + \text{tg}\frac{\pi}{32} = \text{cotg}\frac{\pi}{32}$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{cotg}\frac{\pi}{32} - \text{tg}\frac{\pi}{32}\right) - 2\text{tg}\frac{\pi}{16} - 4\text{tg}\frac{\pi}{8} = 8$$

$$\Leftrightarrow 2\text{cotg}\frac{\pi}{16} - 2\text{tg}\frac{\pi}{16} - 4\text{tg}\frac{\pi}{8} = 8 \Leftrightarrow 4\text{cotg}\frac{\pi}{8} - 4\text{tg}\frac{\pi}{8} = 8$$

$$\Leftrightarrow 8\text{cotg}\frac{\pi}{4} = 8 \text{ luôn đúng.}$$

Bài 249.

Đẳng thức phải chứng minh: $8\sin^318^0 + 8\sin^218^0 = 1$ có

Vế trái $= 8\sin^218^0(\sin18^0 + 1) = 8\sin^218^0(\cos72^0 + 1)$

$$= 16\sin^2 18^0.\cos^2 36^0$$

$$= 16\left(\frac{\sin 18^0.\cos 18^0.\cos 36^0}{\cos 18^0}\right)^2 = \ldots = 1 = VP.$$

Bài 250.

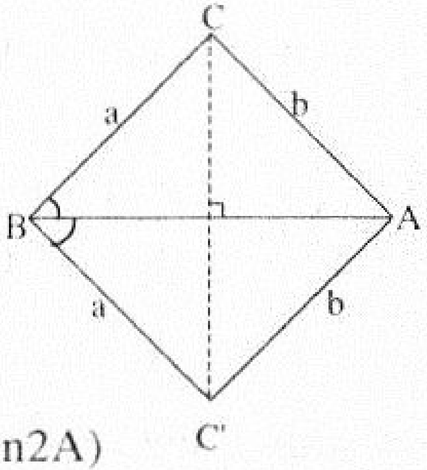
Đẳng thức phải chứng minh:

$$\cos 12^0 + \cos 18^0 - \cos 15^0.\cos 21^0.\cos 24^0 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ có}$$

Vế trái $= \cos 12^0 + \cos 18^0 - (\cos 60^0 + \cos 12^0 + \cos 30^0 + \cos 18^0)$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} = VP.$$

Bài 251.

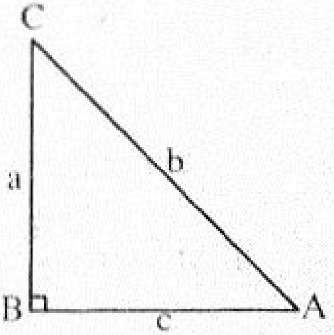


- Trường hợp ΔABC nhọn:

lấy C' đối xứng với C qua BA ⇒

$2S = dt_{\Delta BCC'} + dt_{\Delta ACC'} = \frac{1}{2}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

- Trường hợp ΔABC vuông:



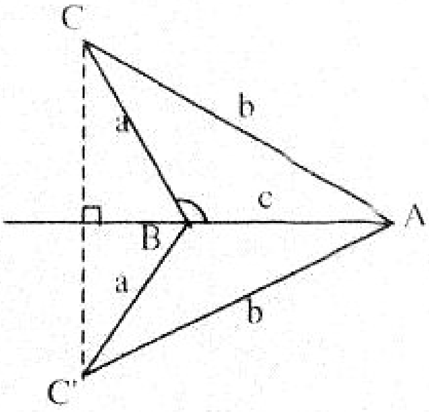
Giả sử $\hat{B} = 1V$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}a.c$

$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}b^2\sin A.\cos A = \frac{1}{4}b^2\sin 2A$

$= \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$ (vì $\sin 2B = \sin 180^0 = 0$).

• Trường hợp ΔABC tù. Giả sử $B > 90^0$ làm như ΔABC nhọn $\Rightarrow$



$$2S = dt_{\Delta ACC'} - dt_{\Delta BCC'}$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2\sin 2(\pi - B)$$

$$\Rightarrow\ S = \frac{1}{4}(b^2\sin 2A + a^2\sin 2B)$$

Bài 252.

Biết ÷ A, B, C và $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

1. Số đo các góc A, B, C là:

$$\text{Vì}\quad \begin{cases} A+B+C=\pi \\ 2B = A+C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{A+C}{2} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\dfrac{A+C}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

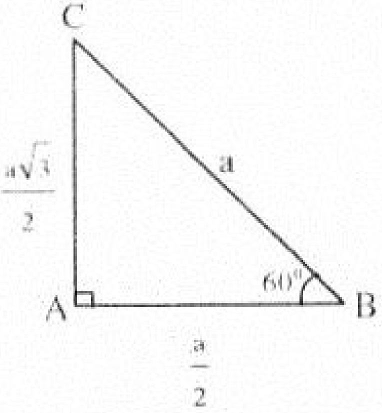
$$\Rightarrow \sin A + \sin C = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A-C}{2} = \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{A+C}{2} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

ĐS: $A = \dfrac{\pi}{2},\ B = \dfrac{\pi}{3},\ C = \dfrac{\pi}{6}$

2. Số đo các cạnh a, b, c là:

Theo 1/ $\Rightarrow$ ΔABClà $\dfrac{1}{2}$ tam giá đều, giả sử đặt như hình bên.

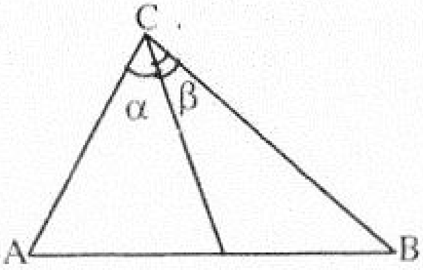


$$\text{Giả thiết } p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = 50$$

$$\Rightarrow a = \frac{200}{3+\sqrt{3}} = BC \quad \Rightarrow$$

$$AB = \frac{a}{2} = \frac{100}{3+\sqrt{3}},\ AC = \frac{100\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

Bài 253.



1. Chứng minh $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

Ta có $AM = \frac{CM\sin\alpha}{\sin A} =$

$$= BM = \frac{CM\sin\beta}{\sin B} \Rightarrow \text{đpcm}$$

2. Tính các góc A, B, C:

Chú ý: $C = \alpha + \beta \Rightarrow A + B = \pi - (\alpha + \beta)$

$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$ và theo tính chất dãy tỉ lệ thức

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\frac{A+B}{2}.\text{tg}\frac{A-B}{2} = \text{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}.\ \text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$\Rightarrow \text{tg}\frac{A-B}{2} = \text{cotg}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vì α, β đã biết, không thể có $\frac{A-B}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} = \pi$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ có thể đặt $\text{tg}\frac{A-B}{2} = \text{cotg}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = m$

$$= \text{tg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A-B}{2} = \frac{\varphi}{2} \\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\varphi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

$C = \alpha + \beta$

Điều kiện có nghiệm là

$$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \Rightarrow -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \text{-cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} < \text{tg}\frac{\varphi}{2} < \text{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{-cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} < \text{cotg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\ \text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} < \text{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow -1 < \text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.\ \text{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{-tg}\frac{\alpha+\beta}{2} < \text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} < \text{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Bài 254. Tính $\hat{C}$?

Giả thiết $(1 + \text{cotg}A)(1 + \text{cotg}B) = 2$

$\Leftrightarrow$ $(\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B) = 2\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow$ $\sin(A + B) = \cos C$

$\Rightarrow$ *ĐS*: $\hat{C} = \frac{\pi}{4}$

Bài 255. Giả thiết

tgAtgB = 3 và tgB.tgC = 6 $\Rightarrow \Delta ABC$ nhọn và $\Rightarrow$

tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC

$\Leftrightarrow$ (tgA + tgB + tgC)tgB = (tgAtgB)(tgBtgC)

$\Leftrightarrow$ $tg^2B = 18 - (3 + 6) = 9 \Leftrightarrow tgB = 3 \Rightarrow tgA = 1 \Rightarrow \hat{A} = 45^0$

Bài 256. Giả thiết

$$S = (c + a - b)(c + b - a) = c^2 - (a - b)^2 = c^2 - a^2 - b^2 + 2ab$$

$$= 2ab - 2ab\cos C = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\Rightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow tg\frac{C}{2} = \frac{1}{4}, \text{ mà}$$

$$tgC = \frac{2tg\frac{C}{2}}{1 - tg^2\frac{C}{2}} \qquad \Rightarrow tgC = \frac{8}{15}.$$

Bài 257.(Phương pháp tổng các số không âm)

Giả thiết $\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) = \frac{5}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 2\sqrt{3}\cos(B - C)\cos A + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B - C)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[1 - \cos^2(B - C)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B - C) \\ \sin(B - C) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow ĐS: \hat{A} = 30^0,\ \hat{B} = \hat{C} = 75^0$$

Bài 258. (Phương pháp tổng hợp các số không âm)

Giả thiết $\cos A = \sin B + \sin C - \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \frac{3}{2} - \cos A = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{A}{2} - \frac{1}{2} - 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \cos\frac{B-C}{2}\,.\cos\frac{A}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left[1-\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow ĐS:\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$$

Bài 259. Giả thiết

÷ cotga, cotgb, cotgc ⇔ 2cotgb = cotga + cotgc

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos b}{\sin b} = \frac{\sin(a+c)}{\sin a \sin c} \qquad (1)$$

Giả thiết $a + b + c = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin b} = \dfrac{1}{\sin a \sin c}$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{\cos(a+c)}{\sin a \sin c} \Leftrightarrow 2 = \frac{\cos a\cos c - \sin a \sin c}{\sin a \sin c}$$

⇔ A = cotga.cotgc = 3

Bài 260. Giả thiết

cosC(sinA + sinB) = sinC.cos(A - B)

$$\Leftrightarrow \left(1-2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right).\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\ (1)$$

Vì $\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$ phải $\neq 0$ (nếu ngược lại thì $A = \pi$ hoặc $B = -\pi$)

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 1 \Leftrightarrow M = \cos A + \cos B = 1$

Bài 261. Biểu thức phải tính giá trị

$$\begin{aligned}
P &= \sin^2 50^0 + \sin^2 70^0 - \cos 50^0.\cos 70^0 = \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\cos 100^0 + \cos 140^0) - \frac{1}{2}(\cos 120^0 + \cos 20^0) \\
&= 1 - \cos 120^0.\cos 20^0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^0\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{2}\cos 20^0 = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Bài 262.

Giả thiết: $\quad \text{tga} + \text{cotga} = m \Rightarrow \text{tg}^2a + \text{cotg}^2a = m^2 - 2$

$\Leftrightarrow (\text{tga} - \text{cotga})^2 = m^2 - 4$

$\Leftrightarrow \text{tga} - \text{cotga} = \pm\sqrt{m^2 - 4}$ với $|m| \geq 2$

Bài 263. Với AM là trung tuyến, $A\hat{M}B = \alpha$

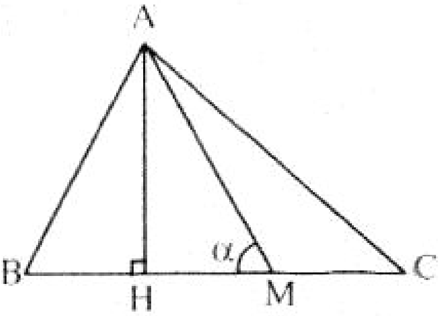
Cần chứng minh $\quad \text{cotg}\alpha = \frac{\sin(B - C)}{2\sin B \sin C} \qquad (1)$

+ Nếu $\alpha = 90^0 \Leftrightarrow AM \perp BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân ở A

$\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{\sin(B - C)}{2\sin B \sin C} \quad (= 0)$

+ Nếu $\alpha \neq 90^0$. Giả sử $B > C \Rightarrow \alpha$ nhọn và chân H của đường cao AH nằm trong đoạn BM $\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{HM}{AH} \qquad (a)$

Mặt khác:



$$\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C} = \frac{1}{2}(\cot gC - \cot gB)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{HC}{HA} - \frac{HB}{HA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{HC-HB}{HA}\right) = \frac{HM}{HA} \quad (b)$$

$$(a) \text{ và } (b) \Rightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}$$

Bài 264.

Đẳng thức phải chứng minh:

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\text{Có vế trái} = \frac{\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)}$$

$$= \text{cotg}\frac{C}{2}.\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}} = \text{Vế phải}$$

Bài 265.

$$\text{Vì } \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2} = 1$$

⇒ Đẳng thức phải chứng minh

$$\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right) +$$

$$+ \left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 1$$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{C}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{C}{2}\right) = 1$ luôn đúng.

Bài 266

Đẳng thức phải chứng minh:

$$\left(\mathrm{tg}\frac{A}{4} + \mathrm{tg}\frac{B}{4} + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right) + \left(\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4} + \mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4} + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\frac{A}{4}\right) -$$

$$- \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathrm{tg}\frac{A}{4} + \mathrm{tg}\frac{B}{4}\right) + \left(\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4} + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\frac{A}{4}\right) +$$

$$+ \left(\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4} - \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\right) = 1 - \mathrm{tg}\frac{C}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathrm{tg}\frac{A}{4} + \mathrm{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right) + \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\left(1 - \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right) = 1 - \mathrm{tg}\frac{C}{4}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{A+B}{4}\left(1 - \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right) + \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left(1 + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right)$$

$$= 1 - \mathrm{tg}\frac{C}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathrm{tg}\frac{\pi - C}{4}\left(1 + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right)\left(1 - \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4} + \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\right) = 1 - \mathrm{tg}\frac{C}{4}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) = \frac{1 - \mathrm{tg}\dfrac{C}{4}}{1 + \mathrm{tg}\dfrac{C}{4}}$$ luôn đúng.

Bài 267.

Vì: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

⇒ Đẳng thức phải chứng minh:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1 + \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) +$$

$$+ \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B + C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B + C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1$$ luôn đúng.

Bài 268. Đẳng thức phải chứng minh:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{R\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}$$

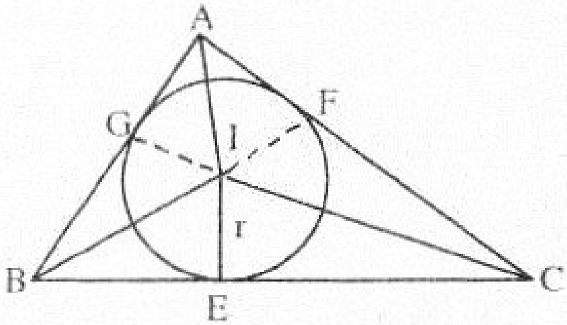
có $\text{cotg}A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} = \frac{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{abc} \quad (1)$

$\text{cotg}B = \frac{R\left(c^2+a^2-b^2\right)}{abc} \quad (2)$

$\text{cotg}C = \frac{R\left(a^2+b^2-c^2\right)}{abc} \quad (3)$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) có đpcm

Bài 269



1. Chứng minh

$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Ta có

$$r = \frac{S}{p} = \frac{bc\sin A}{a+b+c} = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$r = \frac{16R.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

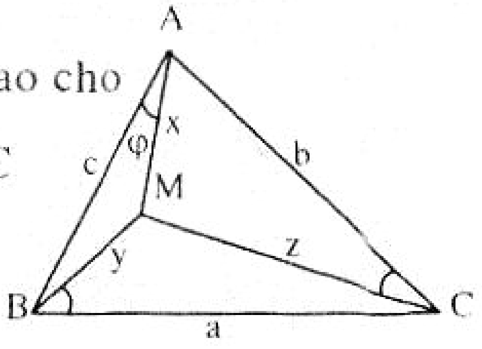
$\Rightarrow$ Đpcm

2. Ta có

$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$; $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$; $IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ $\Rightarrow$ theo 1/ta có

$$IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 4Rr^2.$$

Bài 270.



1. Tìm điểm M trong tam giác ABC sao cho

$M\hat{A}B = M\hat{B}C = M\hat{C}A = \varphi$, thì ΔABC

có$A\hat{M}B = \pi - [\varphi + (B - \varphi)] = \pi - B$

Tương tự ΔBMC có $B\hat{M}C = \pi - C$

Vậy M là giao của 2 cung chứa góc $(\pi\text{-}B)$, $(\pi\text{-}C)$ trương bởi 2 dây cung AB, BC.

(Điểm M như vậy gọi là điểm Brôca, góc φ đó cũng gọilà gốc Brôca)

2. Đặt MA = x, MB = y, MC = z ⇒ theo công thức cơ bản có:

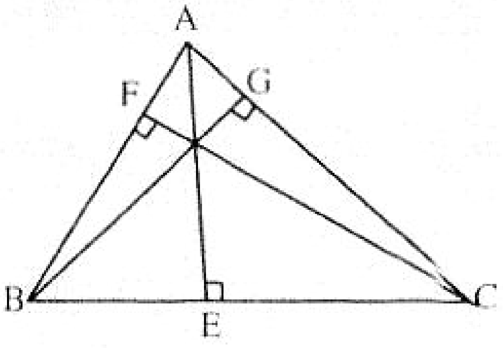
$$\text{cotg}\varphi = \frac{c^2 + x^2 - y^2}{4S_{\Delta AMB}} = \frac{a^2 + y^2 - z^2}{4S_{\Delta BMC}} = \frac{b^2 + z^2 - x^2}{4S_{\Delta CMA}}$$

Theo tính chất dãy tỉ lệ thức ta có:

$$\text{cotg}\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$$

(theo Bài 268) vậy có đpcm.

Bài 271.



Gọi R_A, R_B, R_C là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các ΔBHC, ΔCHA, ΔAHB.

Để chứng minh $R_A = R_B = R_C$ ta chú ý:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \dfrac{AB}{\sin \widehat{AHB}} = 2R_C \Rightarrow AB = 2R_C \sin \widehat{AHB} \\ \bullet \ \text{Các tứ giác EHFB, EHGC, GHFA nội tiếp} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rl} AB & = 2R_C \sin C \\ & = 2R \sin C \end{array}\right\} \Rightarrow R_C = R$$

Chứng minh tương tự có: $R_A = R_B = R_C = R$

Bài 272. Để chứng minh

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

Ta chú ý: $S = pr = \dfrac{1}{2} bc\sin A$

$$\Leftrightarrow r = \frac{bc \sin A}{a+b+c} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$= \frac{16 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} . \cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2}}{4 \cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2}}$$

$$= 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{R} = 4 . \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) . \cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A-B}{2} . \cos\frac{A+B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2}$$

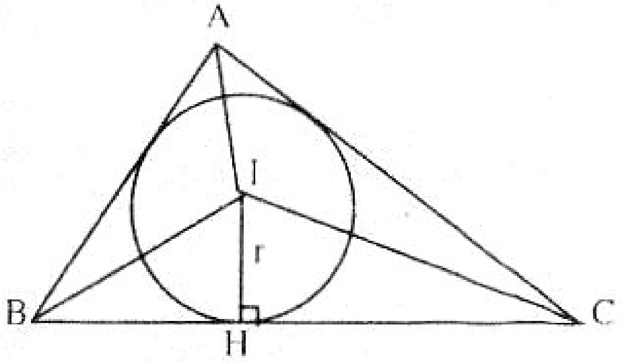
$$= \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

Bài 273. Để chứng minh

$$(a - b)\text{cotg}\frac{C}{2} + (b - c)\text{cotg}\frac{A}{2} + (c - a)\text{cotg}\frac{B}{2} = 0$$

Ta chú ý:



$$a = r\,\text{cotg}\frac{B}{2} + r\,\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$b = r\,\text{cotg}\frac{C}{2} + r\,\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$c = r\,\text{cotg}\frac{A}{2} + r\,\text{cotg}\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (a - b)\text{cotg}\frac{C}{2} = r\left(\cot g\frac{C}{2}.\cot g\frac{B}{2} - \cot g\frac{C}{2}\cot g\frac{A}{2}\right) \quad (1)$$

$$(b - c)\text{cotg}\frac{A}{2} = r\left(\cot g\frac{C}{2}.\cot g\frac{A}{2} - \cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{A}{2}\right) \quad (2)$$

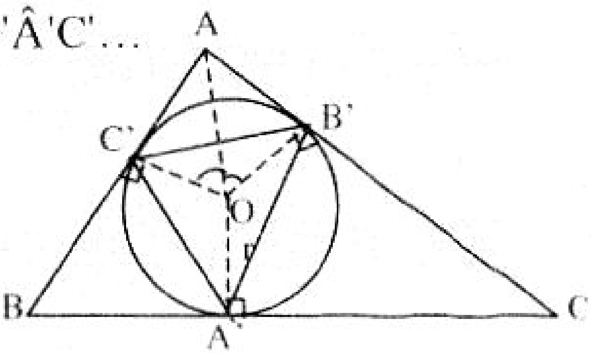
$$(c - a)\text{cotg}\frac{B}{2} = r\left(\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2} - \cot g\frac{C}{2}\cot g\frac{B}{2}\right) \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) có điều phải chứng minh

Bài 274. Chú ý tứ giác OB'AC'...

nội tiếp $\Rightarrow \frac{1}{2}B'\hat{O}C' = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = B'\hat{A}'C'$

$$\Rightarrow \sin\frac{B + C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin B'\hat{A}'C' \ldots$$



1. Đẳng thức phải chứng minh

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$$

Có $a' = 2r\sin A' = 2(p - a)\text{tg}\frac{A}{2}.\sin A'$

$$= (b + c - a)\text{tg}\,\frac{A}{2}.\sin\frac{B + C}{2}$$

$$\Rightarrow\ a' = (b + c - a)\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)\sin\frac{A}{2}}{\sin A}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a'}{a} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ \text{(a)}$$

Tương tự $\frac{b'}{b} = 2\sin\frac{A}{2}\ .\ \sin\frac{C}{2}$ (b)

(a) và (b) $\Rightarrow\ \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$

2. Đẳng thức phải chứng minh: $\frac{S'}{S} = 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ có

Vế trái $= \frac{S'}{S} = \frac{a'b'\sin C'}{ab\sin C} = \left(2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right).\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$\Rightarrow\ \frac{S'}{S} = 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

Bài 275. Để chứng minh đẳng thức

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}}\ ,\ \left(p = \frac{a + b + c + d}{2}\right)$$

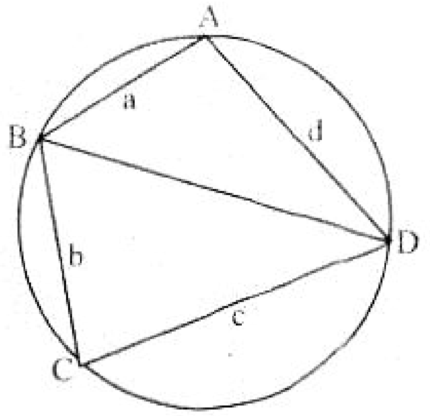
ta chú ý: $\cos A = -\cos C$

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A\ (= BD^2) \Rightarrow$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} =$$

$$= = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)} \Rightarrow$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p - a)(p - d)}{ad + bc} \quad (a)$$



Tương tự $1 + \cos A = \dfrac{2(p - b)(p - c)}{ad + bc} \Rightarrow \cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{(p - b)(p - c)}{ad + bc}$ (b)

$$(a) \text{ và } (b) \Rightarrow tg^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}, \text{ vì } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$$

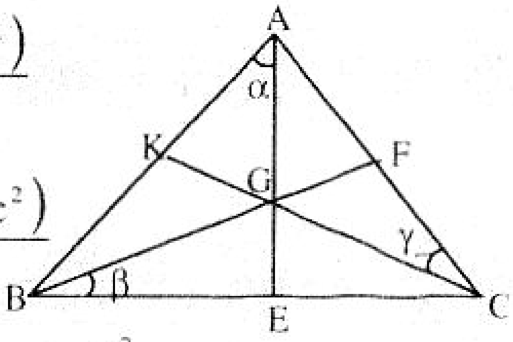
$$\Rightarrow tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}}$$

Bài 276.

Để chứng minh đẳng thức

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S_{\Delta ABC}}$$

Ta chú ý: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}$



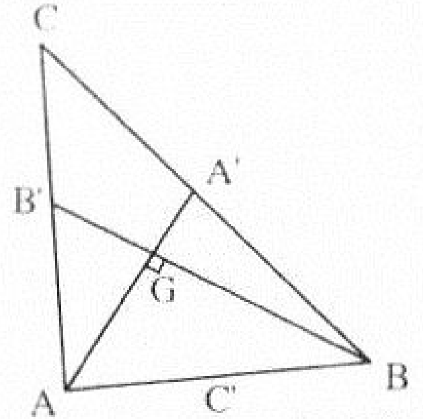
$$\cos\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{2cm_a} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{2cm_a.\sin\alpha} = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S_{\Delta ABC}}$$

Tương tự có cotgβ, cotgγ ⇒ Cộng vế theo vế có đpcm.

Bài 277. Để chứng minh

Trung tuyến AA' ⊥ trung tuyến BB'

$\Leftrightarrow \text{cotg}C = 2(\text{cotg}A + \text{cotg}B)$



Ta chú ý:

Δ vuông AGB có trung tuyến $GC' = \dfrac{AB}{2}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AB^2 = 4GC'^2 \\ CC'^2 = 9GC'^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4CC' = 9AB^2$$ và công thức trung tuyến CC'

$$\Rightarrow 4CC'^2 = 2(a^2 + b^2) - C^2 = 9c^2$$

Vậy $AA' \perp BB' \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 4c^2$

$\Leftrightarrow 2ab\cos C = 4c^2 \Leftrightarrow 8R^2\sin A.\sin B\cos C = 16R^2\sin^2 C$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos C}{\sin C} = 2.\frac{\sin C}{\sin A.\sin B} = 2.\frac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B} = 2(\text{cot}\,gA + \text{cot}\,gB)$$

$\Rightarrow AA' \perp BB' \Leftrightarrow \text{cotg}C = 2(\text{cotg}A + \text{cotg}B)$

Bài 278. Để chứng minh đẳng thức

$$2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C \text{ với điều kiện: } \frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$$

ta xét: $\dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{m_b^2}{m_c^2} = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2(a^2 + b^2) - c^2} \Rightarrow 2a^2 = c^2 + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A \Leftrightarrow \sin^2 A = 2\sin B.\sin C.\cos A$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin B\sin C} = 2\frac{\cos A}{\sin A} \Leftrightarrow 2\,\text{cot}\,gA = \frac{\sin(B+C)}{\sin B.\sin C}$$

$\Leftrightarrow 2\,\text{cot}\,gA = \text{cot}\,gB + \text{cot}\,gC$

Bài 279.

Ta có: $\begin{cases} \ddot{-}\,\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q = 2 \\ \cdot\cdot \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \hat{A} = \dfrac{\pi}{7},\ \hat{B} = \dfrac{2\pi}{7},\ \hat{C} = \dfrac{4\pi}{7}$

Chứng minh $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ Điều phải chứng minh tương đương với chứng minh: $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}$ (1) thật vậy

$$VP(1) = \frac{2\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = VT(1)$$

Chứng minh $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = \frac{5}{4}$

Dễ thấy, với $B = 2A$, $C = 4A \Rightarrow$

$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C =$

$= 1 - 2\cos A.\cos B.\cos 4A = 1 - \frac{2\sin A.\cos A.\cos 2A.\cos 4A}{\sin A} =$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

Bài 280. Để chứng minh:

$c = \frac{1}{2}(a + b)$ với điều kiện $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) = \sin(A + B) = \sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin C = \sin A + \sin B \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(a + b)$

Bài 281. Sử dụng phương pháp chứng minh tương đương để chứng minh: $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow \hat{A} = 2\hat{B}$

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + bc$

$\Leftrightarrow b^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Leftrightarrow c - 2b\cos A = b$

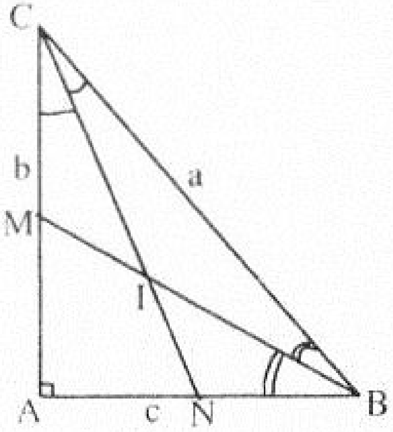
$\Leftrightarrow \sin C - 2\sin B\cos A = \sin B \quad \Leftrightarrow \sin(A+B) - 2\sin B\cos A = \sin B$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin B \quad \Leftrightarrow \hat{A} = 2\hat{B}$: đpcm

Bài 282. a) Chứng minh:

$$\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{l^2}{4a^2},$$

với $a = BC$, $l^2 = l_b.l_c$ $\hat{A} = 1V$



Ta có: $\sin B.\sin C = \dfrac{bc}{a^2}$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\ \cos\frac{C}{2} = \frac{bc}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{bc}{4a^2.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{bc}{4a^2.\frac{c}{l_b}.\frac{b}{l_c}} = \frac{l_b.l_c}{4a^2}$$

Vậy $\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{l^2}{4a^2}$

b) Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔIBC

$$\Rightarrow \frac{BI}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{CI}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{BC}{\sin B\hat{I}C} = \frac{a}{\sin\left(\pi - \frac{B+C}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BI = a\sqrt{2}\sin\frac{C}{2};\ CI = a\sqrt{2}\sin\frac{B}{2} \Rightarrow IB.IC = 2a^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Theo a), ta có: $IB.IC = \dfrac{l^2}{2}$

Bài 283.

Phải chứng minh 3c = 2(a + b) với giả thiết

$$5\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos\frac{A+B}{2} = 2\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\left(2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\right) \Leftrightarrow \ldots$$

$\Leftrightarrow 3c = 2(a + b)$

Bài 284.

Vì $\text{cotg}A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{\Delta ABC}}, \ldots$

mà giả thiết ÷ cotgA, cotgB, cotgC

$$\Leftrightarrow \quad 2.\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{4S_{\Delta ABC}}$$

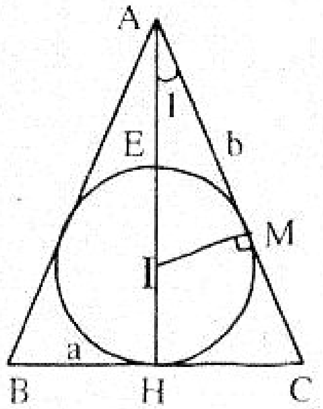
$\Leftrightarrow \quad 2b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow \div\, a^2, b^2, c^2.$

Bài 285.

Vì $AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}, \quad AM\sqrt{9r^2 - r^2} = 2r\sqrt{2}$

$$\text{tg}A_1 = \frac{CH}{AH} = \frac{IM}{AM}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 3a = 2b$$



Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{ab^2}{4R} = CH.AH = \dfrac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} \Rightarrow R = \dfrac{4a}{3\sqrt{7}}$

Bài 286.

- Rõ ràng (d) phải vuông góc với phân giác trong của $\hat{C}$ tại I

- Giả sử (d) cắt các cạnh của ΔABC tại A', B'

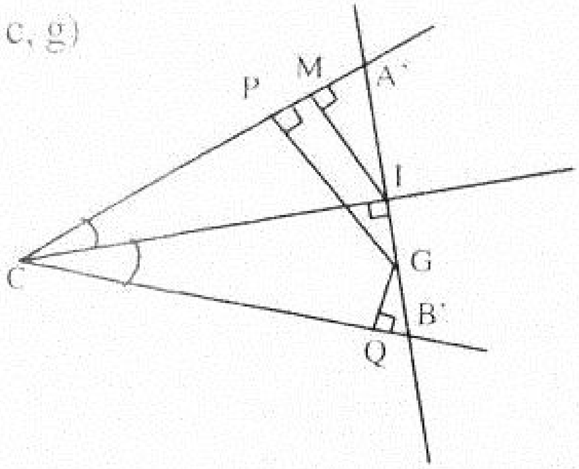
$\Rightarrow \Delta$ vuông CIA' = Δvuông CIB' (g, c, g)

$\Rightarrow CA' = CB'$

$$\Rightarrow S_{\Delta CA'B'} = 2S_{\Delta CIA'} = r.CA' =$$

$$= \frac{1}{2}x.CA' + \frac{1}{2}yCB'$$

$$= \frac{1}{2}(x+y).CA'$$



- Vậy $2r = x + y = \frac{1}{3}h_b + \frac{1}{3}h_a \Rightarrow 2r = \frac{1}{3}\left(\frac{2pr}{a} + \frac{2pr}{b}\right)$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{a+b+c}{3}.\frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

Bài 287. Bất đẳng thức phải chứng minh:

$$\frac{tg^2x + 3}{\sqrt{tg^2x + 2}} > 2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow tg^2x + 3 - 2\sqrt{tg^2x + 2} > 0 \Leftrightarrow (tg^2x + 2) - 2\sqrt{tg^2x + 2} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{tg^2x + 2} - 1\right)^2 > 0 \qquad (2)$$

Vì $tg^2x + 2 \neq 1$, với $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng

Bài 288. Với $\forall$ a, b $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, bất đẳng thức

$$\left|\frac{(tga + tgb)(1 - tga.tgb)}{(1 + tg^2a)(1 + tg^2b)}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}.\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos sb}}{\frac{1}{\cos^2 a}.\frac{1}{\cos^2 b}}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|\sin 2(a+b)| \leq \frac{1}{2}$ luôn đúng

Bài 289. Với n = 1, hiển nhiên

- Giả sử bất đẳng thức $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ đúng với n = k
- Chứng minh bất đẳng thức đó đúng với n = k + 1. Thật vậy:

$$|\sin(k+1)x| = |\sin kx.\cos x + \sin x.\cos kx| \leq |\sin kx| + |\sin x| \leq$$
$$\leq k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|$$

- Vậy bất đẳng thức $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ đúng với $\forall n \in Z^+$

Bài 290. Áp dụng bất đẳng thức B.C.S. cho 2 dãy số

{sinx, cosx} và {(sina + cosa), (sina - cosa)}

Ta có $|\sin x(\sin a + \cos a) + \cos x(\sin a - \cos a)| \leq$

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}.\sqrt{(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2} = \sqrt{2}$$

Bài 291. Bất đẳng thức phải chứng minh

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{c}.\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}.\sqrt{c} \leq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức cho 2 dãy 2 số:

$\{\sqrt{c}, \sqrt{b-c}\}\{\sqrt{a-c}, \sqrt{c}\}$ ta có:

VT(1) $\leq \sqrt{c+b-c}.\sqrt{a-c+c} = \sqrt{ab}$ Vậy BĐT (1) đúng

Bài 292. Bất đẳng thức phải chứng minh

$$12 + 8(tg^2A + tg^2B + tg^2C) + 4(tg^2Atg^2B + tg^2Btg^2C + tg^2Ctg^2A)$$
$$\geq 3(1 + tg^2A)(1 + tg^2B)(1 + tg^2C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + 2(tg^2A + tg^2B + tg^2C) + (tg^2Atg^2B + tg^2Btg^2C + tg^2Ctg^2A)}{(1 + tg^2A)(1 + tg^2B)(1 + tg^2C)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+tg^2B+tg^2C+tg^2Btg^2C\right)+\left(1+tg^2C+tg^2A+tg^2Ctg^2A\right)+ +\left(1+tg^2A+tg^2B+tg^2Atg^2B\right)}{\left(1+tg^2A\right)\left(1+tg^2B\right)\left(1+tg^2C\right)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+tg^2B\right)\left(1+tg^2C\right)+\left(1+tg^2C\right)\left(1+tg^2A\right)+\left(1+tg^2A\right)\left(1+tg^2B\right)}{\left(1+tg^2A\right)\left(1+tg^2B\right)\left(1+tg^2C\right)} \geq \frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow \cos^2A+\cos^2B+\cos^2C \geq \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \cos^2C+1+\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B) \geq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos^2C - \cos(A-B)\cos C + \frac{1}{4} \geq 0_{(1)}$ có $\Delta = \cos^2(A-B) - 1 \leq 0$

$\Rightarrow$ (1) luôn đúng $\Rightarrow$ BĐT phải chứng minh là đúng.

Bài 293. Bất đẳng thức phải chứng minh:

$$\sin3a + 5\sin a - \cos2a + \frac{115}{27} \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad -4\sin^3a + 8\sin a + 2\sin^2a - 1 + \frac{115}{27} \geq 0 \quad (1)$

Đặt $t = \sin a \Rightarrow |t| \leq 1$. Xét hàm số

$f(t) = -4t^3 + 2t^2 + 8t - 1$ trên tập $[-1, 1]$ ta có

$f'(t) = -12t^2 + 4t^2 + 8 = 4(-3t^2 + t + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = \left\{-\frac{2}{3},\ 1\right\} \Rightarrow$ có bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{2}{3}$		1
f'(t)		-	0	+	0
f(t)	(-3)	↘	$-\frac{115}{27}$	↗	(5)

Vậy trên [-1, 1], $f(t) \geq -\dfrac{115}{27} \Rightarrow$ (1) đúng

Bài 294. Bất đẳng thức phải chứng minh

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2 \qquad (1)$$

Có vế trái (1) $= 2 - \dfrac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) - \cos^2C$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2(A + B)$$

$$= 2 + \cos C\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$= 2 + \cos A.\ \cos B.\ \cos C$$

Tam giác ABC nhọn $\Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0$

$\Rightarrow$ Vế trái (1) $= 2 + \cos A.\ \cos B.\ \cos C > 2$ = Vế phải (1)

Bài 295. Ta có:

$$\sin^2A + \sin^2B > k.\ \sin^2C_{(1)} \Leftrightarrow a^2 + b^2 > k.c^2$$

$$\Leftrightarrow\ 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} > kc^2\ \Leftrightarrow\ 2m_c^2 > \left(k - \frac{1}{2}\right)c^2 \qquad (2)$$

Rõ ràng là (2) xảy ra đối với mọi tam giác ABC khi và chỉ khi $k \leq \dfrac{1}{2}$

Vậy số k lớn nhất là $\dfrac{1}{2}$ thì (1) đúng với $\forall\Delta ABC$.

Bài 296. Bất đẳng thức phải chứng minh

$\Leftrightarrow\ 4\cos3\alpha = 5 - 4\cos2\alpha - 5\sin\alpha \geq 0 \qquad (1)$

$\Leftrightarrow\ -16\sin^3\alpha + 8\sin^2\alpha + 7\sin\alpha + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow\ (\sin\alpha - 1)(-16\sin^2\alpha - 8\sin\alpha - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ -(\sin\alpha - 1)(4\sin\alpha + 1)^2 \geq 0$ luôn đúng với $\forall\alpha \Rightarrow$ (1) đúng

Bài 297. Phải chứng minh

$$a + b \le \frac{5}{4}c \ (1) \text{ với điều kiện } \Delta ABC \text{ có } 2A + 3B = \pi \ (2)$$

- Từ (2) $\Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3B}{2} \Rightarrow C = \dfrac{B}{2} + \dfrac{\pi}{2}$

- Ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \dfrac{a}{\cos 3\left(\dfrac{B}{2}\right)} = \dfrac{b}{2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}} = \dfrac{c}{\cos\dfrac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4\cos^2\dfrac{B}{2} - 3} = \frac{b}{2\sin\dfrac{B}{2}} = c \Rightarrow c = \frac{a+b}{4\left(1 - \sin^2\dfrac{B}{2}\right) - 3 + 2\sin\dfrac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a + b = c\left(-4\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} + 1\right) \qquad \text{(a)}$$

Vì $2A + 3B = \pi \Rightarrow \dfrac{B}{2} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{A}{3} \Rightarrow 0 < \dfrac{B}{2} < \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \sin\dfrac{B}{2} < \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1 < -4\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} + 1 \le \frac{5}{4} \qquad \text{(b)}$$

- (a) và (b) $\Rightarrow a + b \le \dfrac{5}{4}c \ \Rightarrow$ (1) đúng

Bài 298.

1) Chứng minh: $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$ với mọi ΔABC

Hai vế BĐT phải chứng minh đều $> 0 \Rightarrow$

$$\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow 4bc\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) \le a^2 \Leftrightarrow a^2 \ge 2bc.2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow a^2 \ge 2bc(1 - \cos A) = 2bc - 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ge 2bc - 2bc\cos A \Leftrightarrow (b - c)^2 \ge 0$ luôn đúng

- Dấu "=" khi và chỉ khi tam giác ABC cân ở A

2) Chứng minh: $\dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \dfrac{\pi}{3}$ với $\forall\Delta ABC$

- Không giảm tổng quát, ta giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow A \geq B \geq C$

$\Rightarrow$ $(a - b)(A - B), (b - c)(B - C), (c - a)(C - A) \geq 0$

- Vì $A + B + C = \pi \Rightarrow$ BĐT phải chứng minh

$$\Leftrightarrow \quad \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} = \frac{A + B + C}{3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3(aA + bB + cC) - (a + b + c)(A + B + C)}{3(a + b + c)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A)}{3(a + b + c)} \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

Dấu "=" khi và chỉ khi mỗi số hạng trên tử số = 0 $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 299.Bất đẳng thức phải chứng minh

$$\frac{\cos\dfrac{A - B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}} + \frac{\cos\dfrac{B - C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{\cos\dfrac{C - A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}}{\sin C} + \frac{2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B - C}{2}}{\sin A} + \frac{2\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C - A}{2}}{\sin B} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} - 2\right) + \left(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C} - 2\right) + \left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} - 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{\sin A}{\sin C}} - \sqrt{\frac{\sin C}{\sin A}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\sin C}{\sin B}} - \sqrt{\frac{\sin B}{\sin C}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\sin B}{\sin A}} - \sqrt{\frac{\sin A}{\sin B}}\right)^2 \geq 0$$

luôn đúng

Bài 300. Bất đẳng thức phải chứng minh

$$\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC} \geq \mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB}) + \frac{1}{2}(\mathrm{tgB} + \mathrm{tgC}) + \frac{1}{2}(\mathrm{tgC} + \mathrm{tgA}) \geq$$

$$\geq \mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2}$$

Ta có $\frac{1}{2}(\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB}) = \frac{\sin C}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} \geq \frac{\sin C}{1 - \cos C} = \mathrm{cotg}\frac{C}{2}$

Tương tự $\frac{1}{2}(\mathrm{tgB} + \mathrm{tgC}), \ldots \Rightarrow$ đpcm

.Bài 301.

Vì x, y $\in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |\mathrm{tgx}|, |\mathrm{tgy}| < 1 \Rightarrow$

BĐT phải chứng minh $\left|\frac{\mathrm{tgx} - \mathrm{tgy}}{1 - \mathrm{tgx.tgy}}\right| < 1 \Leftrightarrow |\mathrm{tgx} - \mathrm{tgy}| < |1 - \mathrm{tgx.tgy}|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tgx} - \mathrm{tgy} < 1 - \mathrm{tgxtgy} \\ \mathrm{tgx} - \mathrm{tgy} > \mathrm{tgxtgy} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tgx}(1 + \mathrm{tgy}) - (1 + \mathrm{tgy}) < 0 \\ \mathrm{tgx}(1 - \mathrm{tgy}) + (1 - \mathrm{tgy}) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \mathrm{tgy})(\mathrm{tgx} - 1) < 0 \text{ luôn đúng} \\ (1 - \mathrm{tgy})(\mathrm{tgx} + 1) > 0 \text{ luôn đúng} \end{cases}$$

Vậy có đpcm

Bài 302. Vì ΔABC nhọn $\Rightarrow$ tgA, tgB, tgC > 0

$\Rightarrow$ BĐT phải chứng minh: $\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC} \geq 3\sqrt{3}$

Có vế trái $\leq \left[\frac{1}{3}(\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC})\right]^3 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{27}(\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC})^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC} \geq 3\sqrt{3}$.

Dấu "=" khi và chỉ khi tgA = tgB = tgC $\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều.

Bài 303.

1) Hãy chứng minh: với $\forall a, b, c > 0$ ta có:

$(1 + a)(1 + b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$ (khai triển vế trái, áp dụng BĐT CôSi...)

Đặt $a = \dfrac{1}{\sin A}$, $b = \dfrac{1}{\sin B}$, $c = \dfrac{1}{\sin C}$ và vì $\sin A.\sin B.\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

có BĐT phải chứng minh:

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

2) Chứng minh tương tự

.Bài 304.

Phải chứng minh với $\forall$ΔABC ta có:

$$\cos A\cos B\cos C \leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

- Nếu ΔABC vuông hoặc tù $\Rightarrow$ hiển nhiên đúng
- Nếu ΔABC nhọn $\Rightarrow 0 < \cos A, \cos B, \cos C < 1$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos A\cos B} \leq \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq \sin\frac{C}{2}$$

Tương tự ... $\Rightarrow$ đpcm

Bài 305.

Tương tự câu 1, bài 303, ta có:

BĐT phải chứng minh: $\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27 \; (1)$

có vế trái $\geq \left(1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}}\right)^3$ $\Rightarrow$ cần chứng minh

$\sin\dfrac{A}{2}\ \sin\dfrac{B}{2}\ \sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \quad \sin^2\dfrac{C}{2} - \cos\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{C}{2} + \dfrac{1}{4} \geq 0$

luôn đúng

Vậy có (1)

Bài 306. Bất đẳng thức phải chứng minh

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + (\cos B + \cos C)x$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2(1 - \cos A) \geq 0 \quad$ (1) có

$\Delta'_x = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A) =$

$= 4\sin^2\left(\dfrac{A}{2}\right)\left(\cos^2\dfrac{B-C}{2} - 1\right) \leq 0$ với $\forall \Delta ABC$

$\Rightarrow$ (1) luôn đúng với $\forall x \in R$

Bài 307. Bất đẳng thức phải chứng minh

$(1 + \sin^2 y)x^2 + 2(\sin y + \cos y)x + 1 + \cos^2 y > 0$

có $\Delta'_x = (\sin y + \cos y)^2 - (1 + \sin^2 y)(1 + \cos^2 y) =$

$= 1 + 2\sin y\cos y - 2 - \sin^2 y\cos^2 y$

$= -(\sin y.\cos y - 1)^2 < 0$ với $\forall y$ vì $\sin y\cos y \neq 1$

Vậy có đpcm

Bài 308.

Bất đẳng thức phải chứng minh:

$$\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos^2 A - \cos(B - C)\cos A + \frac{1}{4} \ge 0$$

Có $\Delta_A = \cos^2(B - C) - 1 \le 0$

Dấu "=" khi và chỉ khi ΔABC đều

Bài 309. Bất đẳng thức phải chứng minh:

$$2^{\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} > 2^{x+1}$$

Có vế trái $\ge 2\sqrt{2^{\sin x+\mathrm{tg}x}}$. Vậy cần chứng minh:

$$2\sqrt{2^{\sin x+\mathrm{tg}x}} > 2^{x+1} \quad \Leftrightarrow \sqrt{2^{\sin x+\mathrm{tg}x}} > 2^x \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow 2^{\sin x+\mathrm{tg}x} > 2^x \Leftrightarrow \sin x + \mathrm{tg}x > 2x \Leftrightarrow \sin x + \mathrm{tg}x - 2x > 0$ (1)

Xét $f(x) = \sin x + \mathrm{tg}x - 2x$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \ge 0$

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > \cos^2 x > 0 \Rightarrow f'(x) > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; mà $f(0) = 0$

Vậy có (1) ⇒ đpcm.

Bài 310. Bất đẳng thức phải chứng minh:

$$2^{2\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}$$

Có vế trái $\ge 2\sqrt{2^{2\sin x+\mathrm{tg}x}} \Rightarrow$ cần chứng minh

$2\sqrt{2^{2\sin x+\mathrm{tg}x}} > 2^{\frac{3x}{2}+1} \Rightarrow f(x) = 2\sin x + \mathrm{tg}x - 3x > 0$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Ta có $f'(x) = \dfrac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \dfrac{(2\cos x + 1)(1 - \cos x)^2}{\cos^2 x} > 0 \ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $f(0) = 0$. Vậy có (1) ⇒ có đpcm

Bài 311.

Với ΔABC có $0 < A \le B \le C < 90^0$ thì BĐT phải chứng minh:

$$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2 \Leftrightarrow 8\cos^3 C - 8\cos^2 C + 5 \ge 0 \quad (1)$$

- Từ giả thiết $0^0 < A \le B \le C < 90^0 \Rightarrow 60^0 \le C < 90^0$

$$\Rightarrow 0 < \cos C \le \frac{1}{2} \Rightarrow$$

- Xét $f(x) = 8x^3 - 8x^2 - 8x + 5$ trên $\left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$

$f'(x) = 24x^2 - 16x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\} \Rightarrow$ có bảng biến thiên

x		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		1	
f'(x)	+	0	-	‖	-	‖	-	0	+
f(x)				5	↘	0			

Vậy $f(x) \ge 0$ với $\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$ có (1) $\Rightarrow$ có đpcm

Dấu "=" khi và chỉ khi ΔABC đều.

Bài 312.

1.a) Vì $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ 0 \le x, y \le \pi \Rightarrow 0 \le \cos\dfrac{x-y}{2} \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ có BĐT phải chứng minh :

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\frac{x+y}{2} \text{ với } 0 \leq x, y \leq \pi$$

1.b) Với BĐT: $\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\frac{x+y+z}{3}$, $0 \leq x, y, z \leq \pi$

Làm tương tự 1.a. và dùng cả kết quả 1.a.

2. a) Ta có:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

Áp dụng BĐT CôSi

$$\Rightarrow \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^3 \geq 27\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Theo 1.b) $\Rightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$

Vậy: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \ldots$

$$\Rightarrow (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \leq \frac{1}{8}$$

2.b) Làm tương tự và áp dụng 2.a.

Bài 313.

Vì ΔABC không tù $\Rightarrow$ có $0 \leq \cos A, \cos B, \cos C \leq 1$

$\Rightarrow \sin A.\sin B \geq \sin A.\sin B - \cos A.\cos B = -\cos(A+B) = \cos C,$

Tương tự... $\Rightarrow (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$ có:

Vế trái $> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A.\sin^2 B + \sin^2 B.\sin^2 C + \sin^2 C.\sin^2 A > 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 4$ $\Rightarrow$ có BĐT phải chứng minh.

CHỦ ĐỀ 5

NHẬN DẠNG TAM GIÁC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để nhận dạng tam giác là vuông cân, đều hoặc có những đặc điểm nào đó về số đo cạnh, số đo một góc.. căn cứ vào các điều kiện đã cho, ta thường dùng các phương pháp sau đây:

1. Biến đổi tương đương
2. Tổng các số không âm
3. Bất đẳng thức (cổ điển, trị số tuyệt đối, tam giác, hoặc các bất đẳng thức cơ bản đã nêu ở chủ đề 4).
4. Phương pháp tam thức
5. Phương pháp cần và đủ.

II. ĐỀ BÀI

§1 - NHẬN DẠNG TAM GIÁC VUÔNG

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 314. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông là

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

Bài 315. Chứng minh rằng nếu ΔABC có

$3(\cos B + \sin A) + 4(\sin B + \cos A) = 10$ thì ΔABC là tam giác vuông

Bài 316. Chứng minh rằng nếu ΔABC có

$$16\cos^4 B - 16\cos^2 B + \sin^2 A - 4\cos 2B - 2\sin A + 6 = 0$$

thì tam giác đó là $\frac{1}{2}$ tam giác đều.

B - CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ + ĐH CÁC NĂM 2000 VÀ 2001

Bài 317. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có:

$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$ thì tam giác ABC vuông

(Câu III - Đề 121)

Bài 318. Hãy nhận dạng tam giác ABC nếu có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

(Câu IVb - Đề 101)

Bài 319. Xác định các tam giác ABC thoả mãn hệ thức

$$c = c\cos 2B + b\sin 2B$$

(Câu II_1 - đề 19)

Bài 320. Chứng minh rằng nếu ΔABC có

$r_A = r + r_B + r_C$ thì tam giác đó vuông (r, r_A, r_B, r_C là các bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp của ΔABC)

(Câu III_2 - Đề 24)

Bài 321. Chứng minh rằng tam giác ABC có

$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$ thì ΔABC vuông

(Câu II_1 - Đề 131)

Bài 322. Chứng minh rằng nếu

$\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B$ thì ΔABC vuông

(Câu II_2 - Đề 45)

Bài 323. 1. Chứng minh rằng ΔABC vuông hay cân khi và chỉ khi

$$a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B \qquad (1)$$

2) Tính các góc của ΔABC nếu ΔABC thoả mãn (1) và hệ thức $\sin 2A + \sin 2B + \cos 2A + \cos 2B = \sqrt{2}$ (2)

(Câu III - Đề 43)

Bài 324. Chứng minh rằng

ΔABC có $\cot g\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$ thì ΔABC vuông.

(Câu III$_2$ - ĐH Ngoại ngữ HN và ĐH Công đoàn HN -2000)

Bài 325. Tam giác ABC có:

$$\begin{cases} \sin B = \left(\sqrt{2} - \cos C\right)\sin A & (1) \\ \sin C = \left(\sqrt{2} - \cos B\right)\sin A & (2) \end{cases}$$

thì tam giác đó là tam giác gì? Tại sao?

(Câu IV$_2$ - ĐH Thủy lợi HN - 2000)

Bài 326. Biết 3 góc của ΔABC thoả mãn hệ thức:

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = m$

Chứng minh rằng: 1) $m = 2$ thì ΔABC vuông.

2) $m > 2$ thì ΔABC nhọn.

3) $m < 2$ thì ΔABC tù

(Câu III - HV Bưu chính viễn thông HN - 2000)

Bài 327. Các góc ΔABC thoả mãn:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

Chứng minh ΔABC là tam giác vuông.

(Câu III - ĐH Ngoại thương - A - 2001)

Bài 328. Tam giác ABC là tam giác gì nếu có

$$\begin{cases} a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 4ab\cos A \sin B & (1) \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B & (2) \end{cases}$$

(Câu III$_2$ - ĐH Kiến trúc HN - 2001)

Bài 329. Cho ABC thoả mãn

$$\sin(A + B)\cos(A - B) = 2\sin A \sin B$$

Chứng minh ΔABC là tam giác vuông

(Câu II_2 - ĐHSP Vinh - D - 2001)

Bài 330. Tam giác ΔABC có đặc điểm gì nếu có:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$$

II_2 - ĐH TCKTHN và ĐH Thương mại HN - 2001

§ 2 - NHẬN DẠNG TAM GIÁC CÂN

A - MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 331. Nhận dạng ΔABC nếu ΔABC có:

$$(c^2 + b^2)\sin(C - B) = (c^2 - b^2)\sin(C + B)$$

Bài 332. Chứng minh rằng nếu ΔABC có

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\cot g^2 A + \cot g^2 B\right)$$ thì tam giác đó cân

Bài 333. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC cân ở C là: $a\sin(B - C) + b\sin(C - A) = 0$

Bài 334. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân nếu có

$$\cos 2B - \cos 2A - 2\sin A - 2\sqrt{3}\cos B + 4 = 0$$

Bài 335. Chỉ ra đặc điểm ΔABC nếu tam giác đó có hệ thức:

$$\text{tg } A + \text{cotg } A = (\sin B + \cos B)^2$$

Bài 336. Nhận dạng ΔABC nếu tam giác đó thoả mãn:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0 & (1) \\ \sin 3A + \cos 2A - 9\sin A + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Bài 337. Tam giác ΔABC có tính chất gì nếu:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 2\cot g \frac{C}{2}$$

(Câu III_2 - Đề 14)

Bài 338. Tam giác ΔABC có tính chất gì nếu:

$$a\operatorname{tg} A + b\operatorname{tg} B = (a + b)\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}$$

(Câu II_2 - Đề 7)

Bài 339. Tam giác ΔABC thoả mãn:

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$$

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân

(Câu II - Đề 39)

Bài 340. Cho tam giác ΔABC thoả mãn:

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\cot g^2 A + \cot g^2 B\right)$$

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân

(Câu II_2 - Đề 51)

Bài 341. Chứng tỏ rằng nếu ΔABC có

$\operatorname{tg} A + 2\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A.\ \operatorname{tg}^2 B$ thì ΔABC là tam giác cân.

(Câu III_2 - Đề 90)

Bài 342. Cho ΔABC có 2 góc nhọn A, B thoả mãn

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B = 2\operatorname{tg}^2\left(\frac{A + B}{2}\right)$$

Chứng tỏ ΔABC là tam giác cân.

(Câu Vb - Đề 1)

Bài 343. Chứng minh rằng nếu ΔABC có

$$a + b = \operatorname{tg}\frac{C}{2}(a\operatorname{tg}A + b\operatorname{tg}B)$$ thì ΔABC là tam giác cân.

(Câu III_3 - HV Ngân hàng- Phân viện TP HCM - A - 2001)

Bài 344.

Cho ΔABC có $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 2\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$

Chứng minh: ΔABC là tam giác cân.

(Câu III_2 - ĐH Dân lập Bình Dương - A- 2001)

§ 3 - NHẬN DẠNG TAM GIÁC ĐỀU

A - MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 345. Chứng minh rằng ΔABC có:

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2\operatorname{tg} A \end{cases}$$

thì tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 346. Chứng minh rằng nếu ΔABC có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3\sqrt{3}.S_{\Delta ABC}$$

thì ΔABC là tam giác đều.

Bài 347. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có:

$$p^2 = ab\sin^2 A + bc\sin^2 B + ca\sin^2 C$$

thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 348. Chứng minh rằng nếu ΔABC có:

$$1 + \cos A \cos B \cos C = 9 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

thì ΔABC là tam giác đều.

Bài 349. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) = 3abc.$$

thì ΔABC là tam giác đều.

B - CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ VÀ ĐH NĂM 2000 VÀ 2001

Bài 350. Cho ΔABC có 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R thoả mãn hệ thức:

$$m^2_a + m^2_b + m^2_c = \frac{9}{2}R$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

(Câu III - Đề 83)

Bài 351. Chứng minh rằng nếu có

$$\begin{cases}\sin A + \sin B \geq 2\sin C\\ \cos A + \cos B \geq 2\cos C.\end{cases}$$

thì tam giác ABC là tam giác đều.

(Câu II_2 Đề 84)

Bài 352.

Tam giác cân ABC có một góc là nghiệm của phương trình

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

(Câu II_1 - Đề 123)

Bài 353. Chứng minh rằng: nếu ΔABC có:

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2P}{9R}$$

Thì tam giác đó là tam giác đều.

(Câu II_1 - Đề 113 - III_2 ĐH Kiến trúc Hà Nội - 2000 và câu IV_2 ĐH Y Dược TP. HCM - 2001)

Bài 354. Chứng minh rằng nếu ΔABC có các hệ thức.

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos C}{\sin C} = \dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}} \\ a^2(b+c-a) = b^3+c^3-a^3 \end{cases}$$ thì tam giác đó là tam giác đều.

(Câu III_2 - ĐH Y Thái Bình - 2000)

Bài 355. Chứng minh rằng nếu tam gác ΔABC có

$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{bc}} \\ \sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} \end{cases}$$ thì tam giác đó là tam giác đều.

(Câu III_1 - CĐSP Kỹ thuật - 2000)

Bài 356. Chứng minh rằng ΔABC có

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - \left(\frac{1}{\cos\dfrac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\dfrac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\dfrac{C}{2}}\right) =$$

$= \text{cotg } A + \text{cotg } B + \text{cotg } C$ thì tam giác đó là tam giác đều.

(Câu III_2 - ĐHSPHN - A - 2000)

Bài 357. Chứng minh rằng ΔABC có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

thì tam giác đó là tam giác đều

(Câu III_2 - ĐHTCKTHN - 2000)

Bài 358. Chứng minh rằng ΔABC thoả mãn:

$$\frac{1}{\sin^2 2A}+\frac{1}{\sin^2 2B}+\frac{1}{\sin^2 2C}=\frac{1}{2\cos A.\cos B.\cos C}$$

thì tam giác đó là tam giác đều.

(Câu III_2 - ĐHSPHN - A - 2001)

Bài 359.

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu có:

$$2(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C)=\sin A\,(\sin^2 B+\sin^2 C)+$$
$$+\sin B\,(\sin^2 C+\sin^2 A)+\sin C\,(\sin^2 A+\sin^2 B)$$

(Câu IV_1 - ĐH Y Thái Bình - 2001)

Bài 360. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Chứng mih rằng ΔABC là tam giác đều khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin A}{m_a}+\frac{\sin B}{m_b}+\frac{\sin C}{m_c}=\sqrt{3}\,.$$

(Câu III - ĐHBKHN - A + D - 2001)

§ 4 - NHẬN DẠNG TAM GIÁC THƯỜNG, NHƯNG CÓ YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÓ NÉT ĐẶC BIỆT

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 361. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right).$$

Bài 362. Biết rằng tồn tại số x để các cạnh ΔABC thoả mãn:

$a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$; $c = x^2 - 1$

khi đó ΔABC có đặc điểm gì ?

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ + ĐH CÁC NĂM 2000 VÀ 2001

Bài 363. Tìm đặc điểm về góc của tam giác ABC nếu có:

$$\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$$

(Câu II_1 - Đề 85)

Bài 364. Chứng ming rằng nếu ΔABC có:

$c^4 = a^4 + b^4$ thì ΔABC nhọn và có $2\sin^2 C = \operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B$.

Bài 365.

Chứng minh rằng nếu ΔABC có

$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$ thì ΔABC có $\hat{A} \leq 60^\circ$.

(Câu III_2 -ĐHSPHN-B+D - 2000

và III_2-HV Hành chính QG -A-2000)

III - HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 314. Dùng phương pháp biến đổi tương đương:

$$\text{Giả thiết } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+c}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài 315. Dùng phương pháp bất đẳng thức: Áp dụng BĐT B.C.S cho 2 bộ 2 số $\{3,4\}, \{\cos B + \sin A, \sin B + \cos A\}$ ta có:

$$10 \le 5\sqrt{(\cos B + \sin A)^2 + (\sin B + \cos A)^2} = 5\sqrt{2 + 2\sin(B + A)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 2\sin(B + A) \Leftrightarrow \sin(B + A) \ge 1 \Leftrightarrow \sin(B + A) = 1.$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Bài 316. Phương pháp tổng các số không âm. Phương trình đã cho:

$$16\cos^4 B - 16\cos^2 B + \sin^2 A - 4\cos 2B - 2\sin A + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4\cos^4 B - 4\cos^2 B + 1) + (\sin^2 A - 2\sin A + 1) - 4\cos 2B + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4.\cos^2 2B - 4\cos 2B + 1) + (\sin A - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \cos 2B = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = 1V, \hat{B} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \Delta ABC \quad \text{là } \frac{1}{2} \text{ tam giác đều.}$$

Bài 317. Giả thiết ΔABC có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

Bài 318. Dễ thấy giả thiết:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = 1$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A hoặc B hoặc C.

Bài 319. Giả thiết $C = c\cos 2B + b\sin 2B$

$$\Leftrightarrow c\,(1 - \cos 2B) = 2b\sin B\cos B \Leftrightarrow \sin C = \cos B$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = \dfrac{\pi}{2} - B \\ c = \dfrac{\pi}{2} + B \end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A}$$

Bài 320. Giả thiết $r_A = r + r_B + r_C$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c) \Leftrightarrow p(b+c-a) = bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Vậy ΔABC vuông tại A.

Bài 321. Áp dụng BĐT B.C.S cho 2 dãy 2 số:

$\{3, 4\}$, $\{\cos B + 2\sin C, \sin B + 2\cos C\}$ ta có

giả thiết: $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$

$$\Leftrightarrow 225 \le 25\left[(\cos B + 2\sin C)^2 + (\sin B + 2\cos C)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 9 \le 5 + 4\sin(B + C) \Leftrightarrow \sin(B + C) \ge 1 \Leftrightarrow \sin(B + C) = 1$$

Vậy ΔABC vuông tại A.

Bài 322. Giả thiết $\sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \sin B$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A + B)\cos(A - B) = 2[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B)[1 - \sin(A + B)] = \cos(A + B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B)\left(\cos\frac{A + B}{2} - \sin\frac{A + B}{2}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\frac{A + B}{2} - \sin^2\frac{A + B}{2} \qquad (1)$$

- Nếu $\cos\frac{A+B}{2} - \sin\frac{A+B}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại C.}$$

- Nếu $\cos\frac{A+B}{2} - \sin\frac{A+B}{2} \ne 0 \Rightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow \cos(A - B)\left(\cos\frac{A + B}{2} - \sin\frac{A + B}{2}\right)\cos\frac{A + B}{2} + \sin\frac{A + B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A + B}{2}[\cos(A - B) - 1] - \sin\frac{A + B}{2}[1 + \cos(A - B)]$$

$$\Leftrightarrow -2\cos\frac{A + B}{2}\sin^2\frac{A - B}{2} - 2\sin\frac{A + B}{2}\cos^2\frac{A - B}{2} = 0$$

Điều này không thể có trong ΔABC . Vậy ΔABC vuông tại C.

Bài 323. 1) Giả thiết

$$a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A) = \sin(A-B).\sin(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = 0 \text{ hoặc } \sin(A+B) = 1$$

Vậy ΔABC cân hoặc vuông tại C.

2) Giả thiết $\sin 2A + \sin 2B + \cos 2A + \cos 2B = \sqrt{2}$

a) Khi ΔABC cân tại C sẽ $\Leftrightarrow \sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Vì ΔABC cân tại C $\Rightarrow$ chỉ có $A = B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{7\pi}{24} = B \Rightarrow C = \frac{10\pi}{24}$$

b) Khi ΔABC vuông tại C sẽ

$$\Leftrightarrow 2\sin 2A = \sqrt{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{8} \text{ hoặc } A = \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{Vậy } \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{8}, B = \frac{3\pi}{8}, C = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{3\pi}{8}, B = \frac{\pi}{8}, C = \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Bài 324. Giải thiết

$$\cot g\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b} \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$$ vuông tại A hoặc C

Bài 325. Từ giả thiết:

$$\begin{cases} \sin B = \left(\sqrt{2} - \cos C\right)\sin A & (1) \\ \sin C = \left(\sqrt{2} - \cos B\right)\sin A & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin B - \sin C = \sqrt{2}.\sin A.(\cos B - \cos C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\frac{B-C}{2} = 0 & (3) \\ \cos\frac{B+C}{2} = -\sqrt{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin A & (4) \end{array}\right.$$

* (4) không thể có vì vế trái (4) > 0, vế phải (4) < 0.

* (3) $\Rightarrow B = C \Rightarrow$ Thay vào (1) $\Rightarrow$ có:

$$\sin B = \sqrt{2}\sin A - \cos B.\sin A = \sqrt{2}\sin 2B - \cos B.\sin 2B$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cos B - 1\right)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{4}$. Vậy ΔABC vuông cân tại A.

Bài 326. Giả thiết: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = m$

$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B\cos C = m - 2$.

- $m = 2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A hoặc B hoặc C.
- $m > 2 \Rightarrow \cos A\cos B\cos C > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{Cả 3 số đều} < 0 & (a) \\ \text{1 trong 3 số} < 0,\ \text{1 số} > 0 & (b) \end{array}\right.$$

(b) không thể có trong $\Delta ABC \Rightarrow \Delta ABC$ nhọn

- $m < 2 \Rightarrow \cos A \cos B \cos s C < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{Cả 3 số đều} < 0 & (a) \\ 1 \text{ trong 3 số} < 0,\ 2 \text{ số} > 0 & (d) \end{array}\right.$$

(c) không thể có trong $\Delta ABC \Rightarrow \Delta ABC$ tù.

Bài 327. Giả thiết

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ B = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A, B hoặc C.

Bài 328.

Giả thiết (1): $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 4ab \cos A \sin B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A = 4 \sin A \sin B \cos A \cos B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A \sin 2B - \sin^2 B \sin 2A = 0$

$\Leftrightarrow \sin A \cos B - \sin B \cos A = 0$

$\Leftrightarrow A = B \Rightarrow$ Thế vào giả thiết (2):

$\sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \sin B.$

Ta có $\cos A = \sin A \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{4}$. Vậy ΔABC vuông cân tại C.

Bài 329. Giả thiết

$\sin(A + B) . \cos(A - B) = 2 \sin A \sin B$

$\Leftrightarrow \sin C . \cos(A - B) = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$\Leftrightarrow \cos(A - B)(1 - \sin C) = - \cos C \qquad (1)$

- Nếu $\cos C = 0 \Leftrightarrow C = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ (1) luôn thoả mãn.

- Nếu $\cos C \neq 0 \Rightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow - \cos C . \cos(A - B)(1 - \sin C) = \cos^2 C$

$\Leftrightarrow \cos(A + B) \cos(A - B) = 1 + \sin C \qquad (2)$

Vì $\cos C \neq 0 \Rightarrow$ vế trái (1) < 1, còn vế phải (2) > 1

$\Rightarrow$ (2) không xảy ra.

Vậy ΔABC vuông ở C.

Bài 330 . Giả thiết

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} \Leftrightarrow \frac{\sin(A - B)}{\sin C} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông ở } C$$

Bài 331. Giả thiết $(c^2 + b^2)\sin(C - B) = (c^2 - b^2)\sin(C + B)$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B[\sin(C-B)+\sin(C+B)] + \sin^2 C[\sin(C-B)-\sin(C+B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B \sin C(\sin 2B - \sin 2C) = 0 \qquad (1)$$

Vì ΔABC có $\sin A$, $\sin B$, $\sin C > 0$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sin 2B - \sin 2C = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = C \\ B = \frac{\pi}{2} - C \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân hay vuông tại A.

Bài 332. Giả thiết $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}\left(\cot g^2 A + \cot g^2 B\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A + \sin^2 B} - \frac{\cos^2 A}{2\sin^2 A} = \frac{\cos^2 B}{2\sin^2 B} - \frac{\cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2\sin^2 A(\sin^2 A + \sin^2 B)} = \frac{\cos^2 B(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2\sin^2 B(\sin^2 A + \sin^2 B)}$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 A - \sin^2 B)(\mathrm{cogt}^2 A - \cot g^2 B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin A = \sin B \\ \cot g^2 A = \cot g^2 B \end{array}\right. \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow A = B. \text{ Vậy } \Delta ABC \text{ cân ở } C.$$

Bài 333. Giả thiết: $a\sin(B - C) - b\sin(C - A) = 0$

$\Leftrightarrow \sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(\cos C - \cos B) + (\cos A - \cos C)\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \cos A = \cos B \Rightarrow \Delta ABC$ cân ở C.

Bài 334. Giả thiết $\cos 2B - \cos 2A - 2\sin A - 2\sqrt{3}\cos B + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A) - \sin A - \sqrt{3}\cos B + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) - \sin A - \sqrt{3}\cos B + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \cos^2 B - \sin A - \sqrt{3}\cos B + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{1}{2} \\ \cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{\pi}{6}$$

Vậy ΔABC cân ở C.

Bài 335. Giả thiết về ΔABC:

$\text{tg } A + \text{cotg } A = (\sin B + \cos B)^2$ (1) có:

+ Vế trái = tgA + cotgA ≥ 2. Dấu " = " khi và chỉ khi tgA = cotgA.

$\Leftrightarrow \text{tg } A = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{4}$ (chú ý: tgu, cotgu luôn cùng dấu; theo (1) thì tgA và cotgA phải luôn cùng dấu dương).

+ Vế phải = $(\sin B + \cos B)^2 \le 2$ (theo BĐT B.C.S). Dấu "=" khi và chỉ khi $\sin B = \cos B \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{4}$

+ Vậy giả thiết (1)

$$\begin{cases} \operatorname{tg}A + \cot gA = 2 \\ \hat{A} = \dfrac{\pi}{4} \\ \sin B + \cos B = \sqrt{2} \\ \hat{B} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác cân ở C với $\hat{C} = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 336. Giả thiết bài toán:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\dfrac{B}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\dfrac{A}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\dfrac{B}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = 0 & (1) \\ \sin 3A + \cos 2A - 9\sin A + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

ta có: (1) $\Leftrightarrow \left(\sin A - \sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos B - \cos\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin A - 1)(2\cos B - \sqrt{3}) = 0 \qquad (3)$$

• (2) $\Leftrightarrow 3\sin A - 4\sin^3 A + 1 - 2\sin^2 A - 9\sin A + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -4\sin^3 A - 2\sin^2 A - 6\sin A + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 A + \sin^2 A + 3\sin A - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 A + 2\sin^2 A + 4\sin A - (\sin^2 A + \sin A + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A(\sin^2 A + \sin A + 2) - (\sin^2 A + \sin A + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin A - 1)(\sin^2 A + \sin A + 2) = 0 \qquad (4)$$

trong đó: $\sin^2 A + \sin A + 2 > 0, \forall A$.

Vậy (4) $\Leftrightarrow 2\sin A - 1 = 0$ (5)

- Do đó hệ (1), (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}(2\sin A-1)(2\cos A-\sqrt{3})=0\\2\sin A-1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos B=\sqrt{3}\\2\sin A=1\end{cases} \text{ hoặc } 2\sin A-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B=\dfrac{\pi}{6}\\A=\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.$$

- Vậy tam giác ABC là tam giác cân ở C với $\hat{C}=\dfrac{2\pi}{3}$ hoặc tam giác có góc $\hat{A}=\dfrac{\pi}{6}$.

Bài 337. Giả thiết $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=2\cot g\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}+\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\dfrac{A+B}{2}}+\frac{\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\dfrac{A+B}{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}\left(\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos B}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{A-B}{2}=0\\\cos A=\cos B\end{array}\right. \Leftrightarrow A=B$$

Bài 338. Giả thiết bài toán

$$a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B=(a+b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\operatorname{tg}A+\sin B\operatorname{tg}B=(\sin A+\sin B)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\left(\operatorname{tg} A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)+\sin\left(\operatorname{tg} B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A.\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}}+\frac{\sin B.\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2}=0\\ \operatorname{tg} A=\operatorname{tg} B\end{array}\right. \Leftrightarrow A=B \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân ở } C.$$

Bài 339. Giả thiết bài toán

$$\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$$

với $2a > c$ sẽ $\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{B}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{B}{2}\right)}=\dfrac{2a+c}{2a-c}$

$$\Leftrightarrow 1+\cot g^2\frac{B}{2}=\frac{4a}{2a-c} \Leftrightarrow 2a-c=2a.2\sin^2\left(\frac{B}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a-c=2a.(1-\cos B) \Leftrightarrow c=2a\cos B$$

$$\Leftrightarrow c^2=2ac\cos B \Leftrightarrow c^2=c^2+a^2-b^2 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân ở } C$$

Bài 340. Giả thiết bài toán

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\cot g^2 A+\cot g^2 B\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(1+\cot g^2 A+1+\cot g^2 B\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)=4 \qquad (1)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

Vế trái $(1)\geq 2\sin A\sin B.\dfrac{2}{\sin A.\sin B}=4$

Vậy có (1) khi và chỉ khi: $\sin^2 A=\sin^2 B \Leftrightarrow A=B$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân ở C.

Bài 341. Giả thiết bài toán

$$tgA + 2tgB = tgA.tg^2B$$

$$\Leftrightarrow \quad tgA + tgB = (tgA.tgB - 1)tgB$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=-tgB \quad (\text{Vì } A+B\neq \pi \Rightarrow tgA+tgB\neq 0$$

$$\Rightarrow 1 - tgAtgB \neq 0)$$

$\Leftrightarrow \quad tg(A + B) = -tgB \Leftrightarrow C = B \Rightarrow \Delta ABC$ cân ở A

Bài 342.

$$\text{Vì } tgA + tgB = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos sB}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B]}$$

$$\Rightarrow \text{tg}A + \text{tg}B \geq \frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}}{\frac{1}{2}\left[1+\cos(A+B)\right]} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}}{\cos^2\frac{A+B}{2}} = 2\text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Từ giả thiết: $\text{tg}^2A + \text{tg}^2B = 2\text{tg}^2\frac{A+B}{2}$

ta có $(\text{tg}A + \text{tg}B)^2 \geq 4\frac{\text{tg}^2A + \text{tg}^2B}{2} \Leftrightarrow (\text{tg}A - \text{tg}B)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $\text{tg}A = \text{tg}B \Rightarrow \Delta ABC$ cân ở C

* *Chú ý*: Trong mọi tam giácABC luôn có:

$$0 < \sin A + \sin B \leq 2\sin\frac{A+B}{2}$$

$$0 < \cos A + \cos B \leq 2\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\text{tg}A + \text{tg}B \quad \geq 2\text{tg}\frac{A+B}{2}$$

Bài 343. Giả thiết bài toán:

$$a + b = \text{tg}\frac{C}{2}(a \times \text{tg}A + b \times \text{tg}B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A} + \frac{\sin^2 B}{\cos B}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\left[\frac{\left(1-\cos^2 A\right)\cos B + \left(1-\cos^2 B\right)\cos A}{\cos A.\cos B}\right]$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos C)\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\left[\frac{\cos A + \cos B}{\cos A \cos sB} - (\cos A + \cos B)\right]$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos C)\cos A.\cos B.\cos\frac{(A-B)}{2} = \sin\frac{C}{2}(\cos A+\cos B)(1-\cos A\cos B)$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos C)\cos A.\cos B.\cos\frac{(A-B)}{2} = 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right).(1-\cos A\cos sB)$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos C)\cos A\cos B = (1-\cos C)(1-\cos A.\cos B).$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A.\cos B = 1-\cos C \Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân ở } C$$

Bài 344. Giả thiết $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B = 2\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos sB} = \frac{2os\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \cos A.\cos B = \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2osA\cos B = 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) \Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân ở } C$$

Bài 345. Giả thiết bài toán

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A & (1) \\ \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = 2\mathrm{tg}A & (2) \end{cases}$$

Có (1) $\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B+C}{2} \Leftrightarrow 3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3} \quad (3)$$

(2) $\Leftrightarrow \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = -2\mathrm{tg}(B+C) = 2\,\frac{\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C - 1} \Leftrightarrow \mathrm{tg}B\mathrm{tg}C = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{4\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}}{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 3\left[1 - \left(\text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2}\right) + \text{tg}^2\frac{B}{2}\text{tg}^2\frac{C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 3\left[1 - \left(\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)^2 + 2\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2}\text{tg}^2\frac{C}{2}\right] \quad (4)$$

$$(3) \text{ và } (4) \Rightarrow \frac{4}{3} = 3 - 3\left(\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)^2 + 6.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

(3) và (5) $\Rightarrow$ theo Viét, $\text{tg}\frac{B}{2}$, $\text{tg}\frac{C}{2}$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}t + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $\text{tg}\frac{B}{2} = \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

Bài 346. Giả thiết bài toán: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3\sqrt{3}.S$

$$\Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = 3\sqrt{3}.\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2\sqrt{3}.ab.\sin C \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab(\cos C + \sqrt{3}\sin C) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab + 2ab - ab(\cos C + \sqrt{3}\sin C) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + 2ab\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + 2ab\left[1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\sin C\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \hat{C} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

Bài 347. Giả thiết bài toán:

$$p^2 = ab\sin^2 A + bc\sin^2 B + ca\sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca =$$

$$= 2ab(1 - \cos 2A) + 2bc(1 - \cos 2B) + 2ca(1 - \cos 2C)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab\cos 2A + 2bc\cos 2B + 2ca\cos 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow f(a) = a^2 + 2(b\cos 2A + c\cos 2C)a + b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B = 0 \ (1)$$

Tam thức f(a) có:

$$\Delta'_a = b^2\cos^2 2A + c^2\cos^2 2C + 2bc\cos 2A\cos 2C - b^2 - c^2 - 2bc\cos 2B$$

hay $\Delta'_a = - b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc\,(\cos 2A\cos 2C - \cos 2B)$

$$= -b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc\,[\cos 2A\cos 2C - \cos(2A + 2C)]$$

$$= -b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc\sin 2A\sin 2C$$

$$= - (b\sin 2A - c\sin 2C)^2 \leq 0$$

Vậy $f(a) \geq 0, \forall a$.

Dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ a = -b\cos 2A - c\cos 2C \end{cases}$

$$\Rightarrow (1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b\sin 2A - c\sin 2C = 0 \\ a = -b\cos 2A - c\cos 2C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2\sin^2 2A + c^2\sin^2 2C - 2bc\sin 2A\sin 2C = 0 \\ b^2\cos^2 2A + c^2\cos^2 2C + 2bc\cos 2A\cos 2C = a^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc\cos(2A + 2C) = a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B \\ \text{Lại có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ cos2B = -cosA $\Leftrightarrow$ 2B = π -A $\Leftrightarrow$ 2B + A = A + B + C

Do tính đối xứng của a, b, c, $\Rightarrow$ có C = A, A = B

Vậy ΔABC là tam giác đều

Bài 348. Giả thiết bài toán

$$1 + \cos A\cos B\cos C = 9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(1 + \cos A\cos B\cos C) =$$

$$= 9.\ 8\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sin A + \sin B + \sin C).\frac{1}{2}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$

$$= 9\sin A\sin B\sin C \qquad (1)$$

- $VT(1) \geq 3\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}.\ 3\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$

$= 9\sin A.\sin B.\sin C$

- Dấu "=" của (1) khi và chỉ khi $\begin{cases} \sin A = \sin B = \sin C \\ \sin^2 A = \sin^2 B = \sin^2 C \end{cases}$

Vậy ΔABC là tam giác đều

Bài 349. Giả thiết bài toán

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) = 3abc$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 3abc \ (1)$$

Trong đó: $a(b^2 + c^2 - a^2) = a.2bc\cos A,\ldots$

Vậy (1) $\Leftrightarrow 2abc(\cos A + \cos B + \cos C) = 3abc$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Theo bảng các BĐT cơ bản đã nêu trong chủ đề 4 $\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 350. Giả thiết bài toán: $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$

có $\frac{81}{4}R^2 = (m_a + m_b + m_c)^2$

$$= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2m_am_b + m_bm_c + 2m_cm_a \leq$$

$$\leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + \left(m_a^2 + m_b^2\right) + \left(m_b^2 + m_c^2\right) + \left(m_a^2 + m_a^2\right)$$

hay $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{9}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

(theo ĐL trung tuyến).

Vậy $\frac{81}{4}R^2 \leq \frac{9}{4}4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$$\Leftrightarrow 9 \leq 4(2 + 2\cos A\cos B\cos C) \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \geq \frac{1}{8} \quad (2)$$

Nhưng $\cos A\cos B\cos C \le \dfrac{1}{8}$ (3)

(2) và (3) $\Rightarrow \cos A\cos B\cos C = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 351. Giả thiết

$$\begin{cases} \sin A + \sin B \ge 2\sin C & (1) \\ \cos A + \cos B \ge 2\cos C & (2) \end{cases}$$

Có (1) suy ra: góc C không phải là góc lớn nhất. (Vị trái lại, thì có: $\begin{cases} \sin C > \sin B \\ \sin C > \sin A \end{cases} \Rightarrow 2\sin C > \sin A + \sin B$, trái với (1))

$\Rightarrow \hat{C}$ nhọn $\Rightarrow \cos C > 0 \Rightarrow$ 2 vế của (1) và (2) luôn dương

$\Rightarrow$ có: $\begin{cases} (\sin A + \sin B)^2 \ge 4\sin^2 C \\ (\cos A + \cos B)^2 \ge 4\cos^2 C \end{cases} \Rightarrow 2 + \cos(A - B) \ge 4$

$\Leftrightarrow \cos(A - B) \ge 1$

$\Rightarrow \cos(A - B) = 1 \Leftrightarrow A = B$ (3)

Thay (3) vào (1) ta có: $\sin A \ge \sin C \Leftrightarrow a \ge c \Leftrightarrow A \ge C$ (3)

Lại thay (3) vào (2) ta có: $\cos A \ge \cos C \Leftrightarrow A \le C$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow A = C$ (5)

(3) và (5) $\Rightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 352. Tam giác cân ABC có một góc là nghiệm của phương trình:

$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (1) thì với $\cos x \ne 0$ và $\cos\dfrac{x}{2} \ne 0$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow t^3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t^2 + t - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0 \text{ với } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t^2 + \sqrt{3}t + 2\right) = 0 \Leftrightarrow t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Vậy ΔABC cân, có 1 góc bằng $\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ ΔABC đều.

Bài 353. Giả thiết bài toán.

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2p}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{ab + bc + ca} = \frac{a + b + c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8R^2\sin A\sin B\sin C}{ab + bc + ca} = \frac{a + b + c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{R(ab + bc + ca)} = \frac{a + b + c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 354. Giả thiết bài toán.

$$\begin{cases} \dfrac{1 + \cos C}{\sin C} = \dfrac{2a + b}{\sqrt{4a^2 - b^2}} & (1) \\ a^2(b + c - a) = b^3 + c^3 - a^3 & (2) \end{cases} \quad \text{với } 2a > b \text{ có}$$

$$* \ (1) \Leftrightarrow \cot g^2\frac{C}{2} = \frac{(2a + b)^2}{(2a - b)(2a + b)} \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2a + b}{2a - b}$$

$\Leftrightarrow 4a\sin^2\dfrac{C}{2} = 2a - b \Leftrightarrow b = 2a\cos C \Leftrightarrow \sin B = 2\sin A\cos C$

$\Leftrightarrow \sin(A - C) = 0 \Leftrightarrow A = C \qquad (3)$

* (2) $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{3} \qquad (4)$

* (3) và (4) $\Leftrightarrow$ tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 355. Giả thiết bài toán

$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{bc}} & (1) \\ \cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} & (2) \end{cases}$$

có *(1) $\Leftrightarrow \sqrt{\sin B\sin C} = \cos\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \sin B\sin C = \dfrac{1+\cos A}{2} \quad (3)$

*(2) $\Leftrightarrow$ . . . . . . $\Leftrightarrow \sin A\sin C = \dfrac{1+\cos B}{2} \qquad (4)$

* (3) và (4) $\Rightarrow \sin C(\sin B - \sin A) = \dfrac{1}{2}(\cos A - \cos B)$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{B-A}{2} = \sin\dfrac{B-A}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{B-A}{2} = 0 \\ \sin^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} \ (5) \\ \hat{C} = \dfrac{\pi}{3} \ \ (6) \end{array}\right.$$

* Nếu $\hat{A} = \hat{B}$, thay vào, chẳng hạn (4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin A\sin C = \dfrac{1+\cos A}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin A \sin C + \cos(B + C) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(A - C) = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{C}$

Vậy ΔABC là tam giác đều.

* Nếu $\hat{C} = \frac{\pi}{3}$, thay vào,

chẳng hạn (4) $\Rightarrow \sqrt{3}\sin A - \cos B = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin A + \cos(A + C) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{3} \qquad (7)$$

(6) và (7) $\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 356. Giả thiết bài toán:

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - \left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) =$$

$$= \text{cotg } A + \text{cotg } B + \text{cotg } C \qquad (1)$$

có $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \Rightarrow$ giả thiết (1)

$$\Leftrightarrow \left(\cot g\frac{A}{2} - \cot gA\right) + \left(\cot g\frac{B}{2} - \cot gB\right) + \left(\cot g\frac{C}{2} - \cot gC\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) = 0 \qquad (2)$$

* Trong đó: $\cot g\frac{A}{2}-\cot gA=\dfrac{2\cos^2\frac{A}{2}-\cos A}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}$

Tương tự,...... ⇒

$$\Rightarrow (2)\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)=0\,(3)$$

* Nhưng $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}\geq\dfrac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}\geq\dfrac{2}{\dfrac{\sin A+\sin B}{2}}=$

$$=\frac{2}{\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}\geq\frac{2}{\cos\frac{C}{2}}$$

Tương tự...., ⇒ lại có:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\geq 0$$

* Vậy dấu "=" trong (3) khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin A=\sin B=\sin C\\ \cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{C-A}{2}=1\end{cases}$$

⇒ ΔABC là tam giác đều.

Bài 357. (Xem bài 356 trên đây, xét từ (3).

Bài 358. Giả thiết bài toán

$$\frac{1}{\sin^2 2A}+\frac{1}{\sin^2 2B}+\frac{1}{\sin^2 C}=\frac{1}{2\cos A\cos B\cos C}\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 2A}+\frac{1}{\sin^2 2B}+\frac{1}{\sin^2 C}=$$

$$=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{8\sin A\sin B\sin C.\cos A\cos B.\cos C}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A\sin 2B\sin 2C}$$

$$=\frac{1}{\sin 2A\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2B\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2C\sin 2A} \qquad (2)$$

* Vì $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}, \forall x,y,z>0$

Dấu "=" khi và chỉ khi $x = y = z$.

* Áp dụng vào (2) $\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C$

Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài 359. Giả thiết bài toán tương đương với:

$$\left.\begin{array}{l}\sin^3 A+\sin^3 B-\left(\sin A\sin^2 B+\sin B\sin^2 A\right)+\\ \sin^3 B+\sin^3 C-\left(\sin B\sin^2 C+\sin C\sin^2 B\right)+\\ \sin^3 C+\sin^3 A-\left(\sin C\sin^2 A+\sin A\sin^3 C\right)\end{array}\right\}=0 \qquad (1)$$

* Sử dụng phương pháp "đánh giá đại diện", xét hiệu thứ nhất của (1) ta có:

$\sin^3 A + \sin^3 B - (\sin A \sin^2 B + \sin B \sin^2 A)$

$= \sin^2 A (\sin A - \sin B) - \sin^2 B (\sin A - \sin B)$

$= (\sin A - \sin B)^2 (\sin A + \sin B) \geq 0$

* Tương tự, vậy dấu "=" trong (1) khi và chỉ khi đồng thời có:

$\sin A - \sin B = 0$, $\sin B - \sin C = 0$, $\sin C - \sin A = 0 \Rightarrow$

ΔABC là tam giác đều

Bài 360.

* Điều kiện cần: Nếu ΔABC là tam giác đều thì:

$$m_a = m_b = m_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2R\sin A\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.\sin A$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c} = \sqrt{3} \qquad (1)$$

* Điều kiện đủ: Nếu có (1) ⇒ ta có: do $m_a^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{3a^2}{2} \geq 2a.m_a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sin A}{m_a} \geq \frac{a^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2} \qquad 2)$$

- Dấu "=" khi và chỉ khi

$$2m_a^2 = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \qquad (3)$$

Tương tự: $\frac{\sin B}{m_c} \geq \frac{b^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}$ (4)

- Dấu "=" khi và chỉ khi: $c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{3b^2}{2}$ (5)

$$\frac{\sin C}{m_c} \geq \frac{c^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2} \qquad (6)$$

- Dấu "=" khi và chỉ khi: $a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{3c^2}{2}$ (7)

- (2) + (4) + (6) vế theo vế ta có: Vế trái (1) ≥ $\sqrt{3}$

Dấu "=" khi và chỉ khi $\frac{3a^2}{2} = \frac{3b^2}{2} = \frac{3c^2}{2}$ ⇔ ΔABC đều

Bài 361. Giả thiết

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{B+C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \;\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy ΔABC có góc $\hat{A} = 120^0$

Bài 362. Giả thiết

$$\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow 120^0$$

.**Bài 363**. Giả thiết

$$\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \;\Leftrightarrow 4.\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} +\text{ Nếu} & \cos\dfrac{5A}{2} = 0 \\ \text{Vì} & 0^0 < \hat{A} < 180^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{5A}{2} = 90^0 \;\text{ hoặc }\; \frac{5A}{2} = 270^0 \Rightarrow$$

Tam giác ABC có ít nhất 1 góc bằng 36^0 hoặc 108^0.

Bài 364. Giả thiết $c^4 = a^4 + b^4$

$$\Rightarrow \begin{cases} c > a \\ c > b \end{cases} \Rightarrow \hat{C} \text{ là góc lớn nhất trong 3 góc A, B, C} \qquad \text{(a)}$$

Lại có $\begin{cases} 2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2 & (1) \\ a^4 + b^4 - c^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2)^2 - c^4 = 2a^2b^2 & (2) \end{cases}$

Vậy (2) $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 2a^2b^2$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (3)$$

(1) và (3) $\Rightarrow \cos C = \dfrac{ab}{a^2 + b^2 + c^2} > 0 \Rightarrow \hat{C}$ là góc nhọn (b)

(a) và (b) $\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác nhọn.

Bài 365. Giả thiết bài toán

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A \quad \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{2\sqrt{\sin^2 B\sin^2 C}} \geq \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{\sin^2 A}{2\sin^2 A} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\hat{A} \leq 60^0$.

CHỦ ĐỀ 6

BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ GIẢI, BIỆN LUẬN BPTLG LÀ:

1) Biến đổi tương đương đưa đến BPT dạng:

$\alpha \leq \sin u \leq \beta$; $\alpha' \leq \cos u \leq \beta'$; $\delta \leq \text{tg } u \leq \gamma$; $\delta' \leq \text{cotg } u \leq \gamma'$.

Từ đó tìm được u:

2) Phương pháp tam thức bậc 2.

3) Phương pháp giải tích.

4) Phương pháp cần và đủ.

II. ĐỀ BÀI

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 366. Giải bất phương trình: $\cos x + \dfrac{3}{2\cos x} - \dfrac{7}{2} \leq 0$

Bài 367. Xét dấucủa hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + \cos 2x$ trên R.

Bài 368. Tìm m để bất phương trình sau thoả mãn với $\forall x \in (0, 2\pi)$

$\cos 3x + \cos 2x - (2 + m)\cos x + m > 0$

B. Các bài toán chọn lọc trong bộ đề và đề thi tuyển sinh vào CĐ + ĐH năm 2000 và 2001

Bài 369. Giải bất phương trình:

$4(x^3 - 2x + 1)(\sin x + 2\cos x) \geq 9\,|x^3 - 2x + 1|$

(Câu III$_2$ - Đề 101)

Bài 370. Giải bất phương trình

$\sin x + \sin 3x < \sin 2x$

(Câu III$_2$ - Đề 101)

Bài 371. Tìm y để bất phương trình sau được nghiệm với mọi x

$x^3\cos y + 2(\sin y \cos y)x + \sin y \geq 0$

(Câu II_1 - Đề 138)

Bài 372. 1) Tìm tham số m sao cho bất phương trình sau vô nghiệm

$$\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq m$$

2) Tìm nghiệm của bất phương trình:

$$\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3} \text{ thoả mãn điều kiện } \lg(x^2 + x + 1) < 1$$

(Câu II_2 - Đề 53)

Bài 373. Tìm các giá trị tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$\frac{m\cos^2 x - m + m^2}{m^2 + 1 - m\cos^2 x} > 0$$

(Câu III_2 - Đề 31)

Bài 374. Đặt t = cos x ⇒ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ có $t \in (0, 1)$ và bất phương trình đã cho $2\sin^2 x - m\cos x - 3 \leq 0$ (1)

trở thành $f(t) = 2t^2 + mt + 1 \geq 0$ (2)

có $\Delta_1 = m^2 - 8 \Rightarrow$

- Nếu $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow$ (2) thoả mãn

$\Rightarrow$ (1) thoả mãn $\forall \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

* Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow |m| > 2\sqrt{2}$ và vì $0 < \frac{c}{a} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ f(t)

có 2 nghiệm $t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{2} \\ 2f(0) = 2 > 0, \forall m \Rightarrow ĐS\text{: } m \geq -2\sqrt{2} \\ \dfrac{S}{2} = -\dfrac{m}{4} < 0 \end{cases}$

t		t_1		t_2 (0,1)	
Dấu f(t)	+	0	-	0	+

Bài 375. Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \log_{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \dfrac{1 - 5\cos^4 3x}{2} \leq 2 & (1) \\ \dfrac{1 + \sin x}{\sin 2x} \leq m & (2) \end{cases}$$

* (1) có điều kiện là $\dfrac{1 - 5\cos^4 3x}{2} > 0$ (3) khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - 5\cos^4 3x}{2} \leq \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \ldots . \cos^4 3x \leq 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in Z \qquad (a)$$

* (2) Có điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow$ (a) chỉ thoả mãn với

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,$ $k \in Z$

khi đó đặt $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\sin 2x} \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\right) = \sqrt{3}$;

$f\left(-\frac{\pi}{6}+k2\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{5\pi}{6}+k2\pi\right)=-\sqrt{3},$

$f\left(-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Vậy

* $m<-\sqrt{3} \Rightarrow$ vô nghiệm.

* $-\sqrt{3}\le m<-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

* $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le m\le\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$x=\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}, k\in Z$$

* $\frac{\sqrt{3}}{3}\le m\le\sqrt{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$x=\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, -\frac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}, k\in Z$$

* $m\ge\sqrt{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$x=\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, \pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}, k\in Z$$

Bài 376.

* Điều kiện cần: Nếu hệ bất phương trình đã cho:

$$\begin{cases} a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\ge 0 & (1)\\ a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\ge 0 & (2)\end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+2c\ge 0$ (3) điều kiện cần.

* Điều kiện đủ: Nếu a, b, c thoả mãn (3) $\Rightarrow$

$$\text{Hệ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}(1+\cos 2x)+\dfrac{b}{2}(1-\cos 2x)+c \le 0 \\ \dfrac{a}{2}(1-\cos 2x)+\dfrac{b}{2}(1+\cos 2x)+c \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{a-b}{2}\cos 2x + c \ge 0 & (3) \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{a-b}{2}\cos 2x + c \ge 0 & (4) \end{cases}$$

Rõ ràng hệ (3), (4) với điều kiện $a + b + 2c \ge 0$ sẽ có nghiệm x thoả mãn $\cos 2x = 0$

Kết luận:

$a + b + 2c \ge 0$ là điều kiện cần và đủ để hệ (1), (2) có nghiệm

III. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ - CHỦ ĐỀ 6

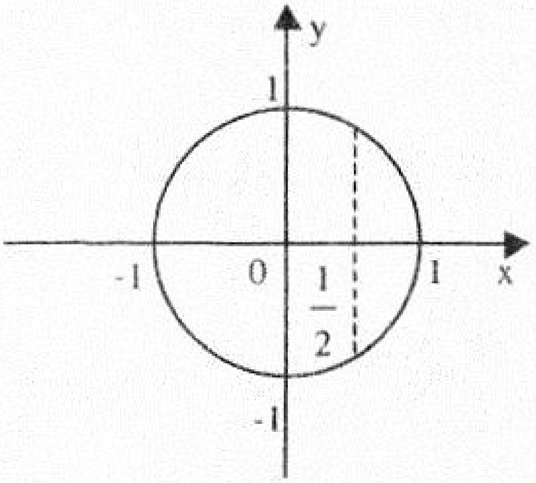
Bài 366. Với

$$\forall x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$$

$$\Rightarrow \text{BPT } \cos x + \frac{3}{2\cos x} - \frac{7}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x - 7\cos x + 3}{2\cos x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x - 3)(2\cos x - 1)}{2\cos x} \le 0$$



$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x - 1}{\cos x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le \cos x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} \le \cos x \le 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\pi \\ \\ k2\pi \le x \le \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. , \qquad k \in Z$$

Bài 367. Ta có $f(x) = \sin x + \cos x + \cos 2x$

$$= (\sin x + \cos x)[(1 + \cos x) - \sin x]$$

$$= (\sin x + \cos x)\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)(\sin x + \cos x)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $T = 4\pi$. Xét trên 1 chu kỳ $[0, 4\pi]$ thì $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{2}, 3\pi\right\} \\ \cos\dfrac{x}{2} = \sin\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right\} \\ \cos x = -\sin x \Leftrightarrow x = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}\right\}\end{array}\right.$$

* Với $x = \dfrac{2\pi}{3} \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2.\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Vậy có bảng của $f(x)$ trên 1 chu kỳ $[0, 4\pi]$ như sau:

0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{10\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{4}$		$\frac{12\pi}{4}$		$\frac{15\pi}{4}$		4π
|	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	|

ĐS: $f(x) < 0$ với

$$\frac{\pi}{2} + k4\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k4\pi, \text{ hay } \pi + k4\pi < x < \frac{7\pi}{4} + k4\pi$$

hay $\frac{10\pi}{4} + k4\pi < x < \frac{11\pi}{4} + k4\pi$,

hay $\frac{12\pi}{4} + k4\pi < x < \frac{15\pi}{4} + k4\pi, k \in Z$

* $f(x) \geq 0$ Với $\forall x$ không thuộc các miền trên.

Bài 368. Bất phương trình

$$\cos 3x + \cos 2x - (2 + m)\cos x + m > 0 \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 - (2 + m)\cos x + m > 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - (5 + m)\cos x - 1 + m > 0$

$\Leftrightarrow 4\cos x(\cos^2 x - 1) + [2\cos^2 x - (1 + m)\cos x - 1 + m] > 0$

$\Leftrightarrow 4\cos x(\cos x + 1)(\cos x - 1) + (\cos x - 1)(2\cos x + 1 - m) > 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(4\cos^2 x + 6\cos x + 1 - m) > 0$. Với $\forall x \in (0, 2\pi)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 6\cos x + 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4\cos^2 x + 6\cos x + 1$

Xét $f(t) = 4t^2 + 6t + 1$ với $t \in [-1; 1) \Rightarrow$ Bài toán trở thành tìm m để $m > f(t)$ với $\forall t \in [-1; 1)$. Ta có: Bảng biến thiên

Bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{3}{4}$		1
$f'(t)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
$f(t)$	(-1)	$\searrow$	$f\left(-\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	11

Vậy $m > 11$ thì (1) đúng với $\forall x \in (0, 2\pi)$.

Bài 369. Bất phương trình đã cho

$4(x^3 - 2x + 1)(\sin x + 2\cos x) \geq 9\,|x^3 - 2x + 1|$ (1)

có $\sin x + 2\cos x = \sin x + \operatorname{tg}\alpha.\cos x$ với $\operatorname{tg}\alpha = 2$

$$= \frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\,.\sin(x+\alpha) = \sqrt{5}\sin(x+\alpha)$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1)\sin(x+\alpha) \geq \frac{9}{4\sqrt{5}}\left|x^3 - 2x + 1\right|$ (2)

* Nếu $x^3 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \frac{x^3 - 2x + 1}{\left|x^3 - 2x + 1\right|}\sin(x+\alpha) \geq \frac{9}{4\sqrt{5}} > 1$

$\Rightarrow$ (2) trừ (1) vô nghiệm.

* Nếu $x^3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ (2) tức (1) thoả mãn

$\Leftrightarrow x = \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

Bài 370. Bất phương trình đã cho

$\sin x + \sin 3x < \sin 2x$ (1)

$\Leftrightarrow \quad \sin 2x\,(2\cos x - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow \quad (I)\begin{cases}\sin 2x > 0\\ 2\cos x - 1 < 0\end{cases} \text{ hoặc } (II)\begin{cases}\sin 2x < 0\\ 2\cos x > 0\end{cases}$$

$$* \ (I) \Leftrightarrow \begin{cases}0 < \sin 2x = 2\sin x\cos x\\ -1 \le \cos x < \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (a)\begin{cases}0 < \cos x < \dfrac{1}{2}\\ 0 < \sin x \le 1\end{cases} \text{ hoặc}$$

$$(b)\begin{cases}-1 \le \cos x < 0\\ -1 \le \sin x < 0\end{cases}$$

$$* \ (II) \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin x\cos x < 0\\ \dfrac{1}{2} < \cos x \le 1\end{cases} \Leftrightarrow (c)\begin{cases}-1 \le \sin x < 0\\ \dfrac{1}{2} < \cos x \le 1\end{cases}$$

* (a), (b), (c)

$$\Rightarrow \ ĐS\text{:} \ x \in \left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(\pi + k2\pi, \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)\\ \cup\left(-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k2\pi\right), k \in Z\end{array}\right\}$$

Bài 371. Coi giả thiết của bài:

$(\cos y)x^2 + 2(\sin y\cos y)\,x + \sin y \ge 0$ là $f(x) \ge 0$ (1)

$$* \text{ Nếu } \cos y \ne 0 \Rightarrow f(x) \ge 0 \text{ với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_x \le 0\\ \cos y > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin y\cos y(\sin y\cos y - 1) \le 0\\ \cos y > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sin 2y}{2}\left(\dfrac{\sin 2y}{2} - 1\right) \le 0\\ \cos y > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2y \ge 0\\ \cos y > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin y \ge 0\\ \cos y > 0\end{cases} \Leftrightarrow k2\pi \le y \le \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z \quad (a)$$

* Nếu $\cos y = 0 \Rightarrow$ (1) thoả mãn với $\forall x$ khi và chỉ khi
$\sin y \ge 0$ (b)

* (a), (b) $\Rightarrow$ *ĐS:* $k2\pi \le y \le \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

Bài 372. 1) Giả thiết cho bất phương trình

$$\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq m$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}-2m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}-2m}{2} \Rightarrow (1)\text{Vô nghiệm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-2m}{2} < -1 \Leftrightarrow m > \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

2) Điều kiện $\lg(x^2 + x + 1) < 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 9 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{37}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{37}}{2} \qquad (1)$$

Vậy khi $m = \sqrt{3} \Rightarrow$ từ câu 1 ta có

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (2)$$

- (1) và (2) $\Rightarrow$ ứng với $k = \{0, 1\}$

$\Rightarrow$ *ĐS:* $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Bài 373. Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow t \in [0, 1], \forall x \Rightarrow$ Bất phương trình đã cho $\frac{m\cos^2 x - m + m^2}{m^2 + 1 - m\cos^2 x} > 0(1)$ trở thành

$\frac{mt - m + m^2}{-mt + m^2 + 1} > 0 \Rightarrow$ Để (1) thoả mãn với $\forall x$, ta cần tìm m để $f(t) = (mt - m + m^2)(m^2 + 1 - mt) > 0, \forall t \in [0, 1]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2f(0) < 0 \\ -m^2f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 1$$

Bài 374. Đặt $t = \cos x \Rightarrow$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ có $t \in (0, 1)$ và bất phương trình đã cho $2\sin^2x - m\cos x - 3 \le 0$ (1)

trở thành $f(t) = 2t^2 + mt + 1 \ge 0$ (2)

có $\Delta_t = m^2 - 8 \Rightarrow$

Nếu $\Delta \le 0 \Leftrightarrow |m| \le 2\sqrt{2} \Rightarrow$ (2) thoả mãn

$\Rightarrow$ (1) thoả mãn $\forall \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

* Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow |m| > 2\sqrt{2}$ và vì $0 < \frac{c}{a} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f(t)$

có 2 nghiệm $t_1 \ne t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{2} \\ 2f(0) = 2 > 0, \forall m \Rightarrow ĐS:\ m \ge -2\sqrt{2} \\ \frac{S}{2} = -\frac{m}{4} < 0 \end{cases}$

t		t_1		t_2 (0,1)
Dấu f(t)	+	0	-	0 +

Bài 375. Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \log_{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \dfrac{1 - 5\cos^4 3x}{2} \le 2 & (1) \\ \dfrac{1 + \sin x}{\sin 2x} \le m & (2) \end{cases}$$

* (1) có điều kiện là $\frac{1 - 5\cos^4 3x}{2} > 0$ (3) khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - 5\cos^4 3x}{2} \leq \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \ldots \cos^4 3x \leq 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in Z \qquad \text{(a)}$$

* (2) Có điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow$ (a) chỉ thoả mãn với

$x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in Z$

khi đó đặt $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin 2x} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = \sqrt{3}$;

$f\left(-\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right) = -\sqrt{3}$,

$f\left(-\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Vậy

* $m < -\sqrt{3} \Rightarrow$ vô nghiệm.

* $-\sqrt{3} \leq m < -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

* $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$x = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}, k \in Z$$

* $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \sqrt{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$x = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, -\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}, k \in Z$$

* $m \geq \sqrt{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$x = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}, k \in Z$$

Bài 376.

* Điều kiện cần: Nếu hệ bất phương trình đã cho:

$$\begin{cases} a\cos^2 x + b\sin^2 x + c \geq 0 & (1) \\ a\sin^2 x + b\cos^2 x + c \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow a + b + 2c \geq 0$ (3) điều kiện cần.

* Điều kiện đủ: Nếu a, b, c thoả mãn (3) $\Rightarrow$

$$\text{Hệ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{b}{2}(1 - \cos 2x) + c \leq 0 \\ \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2}(1 + \cos 2x) + c \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2x + c \geq 0 & (3) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a-b}{2}\cos 2x + c \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Rõ ràng hệ (3), (4) với điều kiện $a + b + 2c \geq 0$ sẽ có nghiệm x thoả mãn $\cos 2x = 0$

Kết luận:

$a + b + 2c \geq 0$ là điều kiện cần và đủ để hệ (1), (2) có nghiệm

CHỦ ĐỀ 7

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Kiến thức cơ bản về bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số, xin bạn đọc xem ở "chủ đề 2/ tập 2/ Hướng dẫn ôn luyện thi môn đại số" - Nhà xuất bản Đại học Quốc gia - 2002, của cùng tác giả.

Riêng đối với hàm số lượng giác, phương pháp thường dùng để giải bài toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, ngoài các phương pháp.

- Bất đẳng thức (cổ điển, trị số tuyệt đối,....)
- Giải tích.
- Tam thức bậc 2.

Còn có: - Phương pháp điều kiện nghiệm của hàm số dạng:

$y = a\cos u + b\sin u$; $y = au^2 + bu + c \quad (a \neq 0)$,

là $y^2 \leq a^2 + b^2$; $\Delta\ (\Delta') \geq 0$. Từ đó tìm được maxy, miny.

- Tính chất hàm số lượng giác.

$|\sin u|, |\cos u| \leq 1$, với $\forall$ u,.....

2) Cần chỉ rõ, hàm số đạt GTLN, GTNN trên tập nào và tại vị trí nào trên tập đó có nhiều bài, việc này khá khó khăn !

II - ĐỀ BÀI

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HOẠ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 377. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \frac{\cos x + \sin x + 2}{\cos x + 2}$$

Bài 378. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \sin^{10}x + \cos^{10}x$

Bài 379. Tìm GTNN của hàm số

$$y = \frac{1}{\cos^4(x)} + \frac{2}{1-\cos^4 x} \text{ với } x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

Bài 380. Tìm GTNN của hàm số

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}$$

Bài 381. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \cos B - \sqrt{3}\left(\sin A + \sin C\right) \text{ với A, B, C là 3 góc của } \Delta ABC$$

B. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC TRONG BỘ ĐỀ VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CĐ + ĐH NĂM 2000 VÀ 2001

§1. PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN NGHIỆM

Bài 382. Chứng minh rằng:

$y = \sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}$ chỉ nhận giá trị dương.

(Câu III_1 - Đề 36)

Bài 383. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin 2x + 4} \text{ trong } (-\pi, \pi)$$

(Câu III - Đề 67)

Bài 384. Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có

$$\left|\frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \leq \frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$$

(Câu II_2 - Đề 139)

Bài 385. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{k\sin x + 1}{\cos x + 2} \text{ nhỏ thua } (-1)$$

(Câu III_2 - Đề 34)

Bài 386.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$

(Câu IV_1 - ĐH Thái nguyên - G - 2000)

§2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Bài 387. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \sin x + 3\sin 2x$

(Câu II_1 - Đề 134)

Bài 388. Cho $a \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

$y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}$

(Câu II_2 - Đề 59)

Bài 389. Tuỳ theo giá trị tham số m, hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

$y = \sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x\cos x$

(Câu II_1 - Đề 54)

Bài 390.

Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = 2(1 + \sin 2x\cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$$

(Câu II_2-ĐH Luật HN và ĐH Dược HN +IV_1 ĐH Cần thơ A - 2001)

Bài 391. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$$

(Câu III_1 - ĐHSPHN - A - 2001)

Bài 392.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$y = \sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x$

(Câu IV_1 - ĐH Thương mại HN -2001)

§3. PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 393. Tam giác ABC nhọn tuỳ ý, tìm GTNN của tích

$$P = \text{tg}\, A.\, \text{tg}\, B\, .\, \text{tg}\, C$$

(Câu II_1 - Đề 10)

Bài 394: Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$$

(Câu II_1 - Đề 96)

Bài 395. α, β, γ là 3 góc dương, thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Tìm GTLN của biểu thức

$$g = \sqrt{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} + \sqrt{1 + \text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\gamma} + \sqrt{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\gamma}$$

(Câu III_2 - Đề 144)

Bài 396. Tam giác nào làm cho biểu thức

$$M = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \text{ đạt GTLN?}$$

(Câu III_2 - ĐHBKHN -A-2000)

Bài 397. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$y = 2\sin^8 x + \cos^4(2x)$$

(Câu V_2 - ĐH TC KT - 2000)

§ 4 . PHƯƠNG PHÁP TÍNH CHẤT HÀM SỐ

Bài 398. Tìm GTNN, GTLN của hàm số

$$y = \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \cos\left(\frac{4x}{1+x^2}\right) + 1$$

(Câu Vb - Đề 58)

Bài 399. Tìm GTNN của hàm số

$$y = (\cos x + \sin x)^3 + \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

(Câu III2 - Đề 115)

Bài 400. α là góc cố định cho trước. Tìm GTNN của hàm số

$$y = tg^2(x + \alpha) + tg^2(x - \alpha)$$

(Câu II_1 - Đề 93)

Bài 401. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x + \sin x \cos x + 1$$

(Câu III_3 - HV Quân y - 2000)

Bài 402. Tìm GTLN của

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(Câu IV_2 - ĐHKTQD HN - A - 2000)

Bài 403. CMR với ΔABC bất kỳ, thì

P = cos A + cos B + cos C đạt GTLN nhưng không đạt GTNN.

(Câu III_1 - ĐHSPHN 2 - A - 2001)

III - HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ - CHỦ ĐỀ 7

Bài 377. Hàm số đã cho $y = \dfrac{\cos x + \sin x + 2}{\cos x + 2}$ xác định với $\forall x \in R$.

và $\Leftrightarrow y \cos x + 2y = \cos x + \sin x + 2$

$\Leftrightarrow (y - 1)\cos x - \sin x = 2 - 2y$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm đối với x khi và chỉ khi

$(2 - 2y)^2 \leq (y - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3-\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

vậy $\begin{cases} \max y = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ R \end{cases}$ tại x được xác định bởi phương trình:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x - \sin x = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{6} - x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k'2\pi,\ k' \in z$$

$\begin{cases} \min y = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ R \end{cases}$ tại x được xác định bởi phương trình

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x + \sin x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

ĐS: . Trên R: * $\max y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ tại $x = \frac{2\pi}{3} + k'2\pi$

* $\min y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ tại $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 378. Hàm đã cho $y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{5}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^5 =$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + 10\cos^2 2x + 5\cos^4 2x\right) = \frac{1}{16}\left[5\left(\cos^2 2x + 1\right)^2 - 4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \le y \le 1 \Rightarrow$$

* $\begin{cases} \max y = 1 \\ R \end{cases}$ tại $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}\ k \in z$

* $\min y = \frac{1}{16}$ tại $\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in z$

Bài 379. với $\forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$ hàm đã cho

$$y = \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{2}{1-\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-\cos^4 x+\cos^4 x}{\cos^4 x} + \frac{2\left(1-\mathrm{css}^4 x+\cos^4 x\right)}{1-\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-\cos^4 x}{\cos^4 x} + 1 + 2\left(1+\frac{\cos^4 x}{1-\cos^4 x}\right) \geq 3+2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min y \\ \forall x \neq k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} k \in Z$$

$$= 3+2\sqrt{2} \text{ tại } \frac{1-\cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{2\cos^4 x}{1-\cos^4 x} \Leftrightarrow \cos^4 x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Bài 380. Với $\forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$, hàm số đã cho

$$y = \left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1+\frac{16}{\sin^2 2x}\right)$$

Đặt $t = \sin^2 2x \quad \Rightarrow t \in (0,\ 1] \Rightarrow$

$y = \dfrac{-t^2-14t+32}{2t}$ có y' với $\forall t \in (0,1]$

$y' = \dfrac{-2t^2-32}{3t^2} < 0\ \forall t \in (0,\ 1] \Rightarrow$

y nghịch biến trên (o, 1]$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \min y \\ \forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z \end{cases} = \begin{cases} \min y \\ (0,1] \end{cases} = y(1) = \frac{17}{2} \text{ tại } t = \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

Bài 381.

Với $o < A, B, C < 180^0 \Rightarrow$biểu thức đã cho

$$p = \cos B - 2\sqrt{3}\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A\_C}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{B}{2} - 2\sqrt{3}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A\_C}{2} - 1$$

$$\Rightarrow p \ge 2\cos^2\frac{B}{2} - 2\sqrt{3}\cos\frac{B}{2} - 1$$

Đặt $t = \cos\frac{B}{2} \Rightarrow o < t < 1 \Rightarrow$

$P \ge f(t) = 2t^2 - 2\sqrt{3}t - 1$ Trongđó

$$\begin{cases} \min f(t) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.\frac{3}{4} - 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{5}{2} \\ (0,1) \end{cases}$$ Vậy

$$\begin{cases} \min p = -\frac{5}{2} \text{tại} \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3} \\ (0,\pi) \end{cases}$$

$$* \text{ Khi } B = \frac{\pi}{3} \Rightarrow P = -\frac{5}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}.\cos\frac{\pi}{6}.\cos\frac{A-C}{2}$$

Hay $2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{A-C}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = 1 \Leftrightarrow A = C$$

ĐS: $\begin{cases} \min p = -\frac{5}{2} \\ (0,\pi) \end{cases}$ khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều

Bài 382. Hàm số đã cho

$$y = \sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}$$

$$= -7\sin 2x - 3\cos 2x + 3\sqrt[3]{33} - 2 \geq +3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58}$$

$\Rightarrow$ cần chứng minh: min $y = 3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58} > 0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{33} > 2 + \sqrt{58} \Leftrightarrow 27.33 > 8 + 12\sqrt{58} + 6.58 + 58\sqrt{58}$$

$\Leftrightarrow 545 > 70\sqrt{58} \Leftrightarrow 297025 > 284200$. Vậy $y > 0, \forall x$

Bài 383. Hàm số đã cho

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$$ (1)Xác định với $\forall x \in (-\pi, \pi)$

$\Leftrightarrow (y + 2)\sin x + (1 - 2y)\cos x = 4y - 3$ (1)

Để (2) luôn có nghiệm x $\Leftrightarrow (y + 2)^2 + (1 - 2y)^2 \geq (4y - 3)^2$.

$$\Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2$$

Vậy * $\begin{cases} \max y = 2 \text{ khi và chỉ khi } 4\sin x - 3\cos x = 5 \\ (-\pi, \pi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \varphi + \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi), \cos\varphi = \frac{4}{5}, \sin\varphi = \frac{3}{5}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

- $\begin{cases} \min y = \dfrac{2}{11} \text{ khi và chỉ khi } \dfrac{24}{25}\sin x + \dfrac{7}{25}\cos x = -1 \\ (-\pi, \pi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - \varphi \in (-\pi, \pi), \cos\varphi = \frac{24}{25}, \sin\varphi = \frac{7}{25}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Bài 384. Cần chứng minh:

$$|y| = \left|\frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}, \forall x$$

Hàm số y đã cho xác định với $\forall x$. Gọi y_0 là một giá trị của y thì điều phải chứng minh tương đương với chứng minh phương trình:

$$y_0 = \frac{\cos 3x_0 + a\sin 3x_0 + 1}{\cos 3x_0 + 2} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow (1 - y_0)\cos 3x_0 + a\sin 3x_0 + 1 - 2y_0 = 0 \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow 3y_0^2 - 2y_0 - a^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \le y_0 \le \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}$$

Vậy: Với $\forall x$ luôn có

$$|y| = \left|\frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \le \frac{1 + \sqrt{3a^2 + 1}}{3}$$

Bài 385. Hàm đã cho $y = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$ xác định với $\forall x$ và

$\Leftrightarrow k\sin x - y\cos x = 2y - 1 \Rightarrow$

Phương trình có nghiệm x với điều kiện:

$k^2 + y^2 \ge 4y^2 - 4y + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3k^2}}{3} \le y \le \frac{2 + \sqrt{1 + 3k^2}}{3}$$

$$\Rightarrow \left\{ \min y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3k^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow k^2 > 8 \Rightarrow \text{ĐS } |k| > 2\sqrt{2} \right.$$

Bài 386. (khác bài 383 - III - Đề 67 là xét trên R chứ không chỉ trên $(-\pi, \pi)$

Biến đổi tương tự bài 383 ta có:

$$* \begin{cases} \max\limits_{R} y = 2 & \text{Khi và chỉ khi } x = \varphi + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z \\ & \text{Với } \cos\varphi = \dfrac{4}{5}, \sin\varphi = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\limits_{R} y = \dfrac{2}{11} & \text{Khi và chỉ khi } x = -\dfrac{\pi}{2} - \varphi + k2\pi, k \in Z \\ & \text{Với } \cos\varphi = \dfrac{24}{25}, \sin\varphi = \dfrac{7}{25}. \end{cases}$$

Bài 387. Hàm số đã cho $y = \sin x + 3\sin 2x$ liên tục, có đạo hàm và tuần hoàn (chu kỳ $T = 2\pi$) trên R $\Rightarrow$ xét trên 1 chu kỳ $(-\pi, \pi)$.

$$y' = 12\cos^2 x + \cos x - 6 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right\}$$

$$* \text{ Khi } \cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sin x + 6\sin x\cos x = \pm\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$$* \text{ Khi } \cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{7\sqrt{7}}{8}$$

$$* \; y(-\pi) = y(\pi) = 0$$

$$* \text{ Vậy } \begin{cases} \max y \\ [-\pi, \pi] \end{cases} = \begin{cases} \max\limits_{R} y = \dfrac{5\sqrt{5}}{3} \text{ khi} \begin{cases} \cos x = \dfrac{2}{3} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Bài 388. Vì $a \geq 1 \Rightarrow$ hàm đã cho

$y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}$ Xác định $\forall x \in$ R và $y > 0$. $\forall x \in$ R. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của y trên R với $a \geq 1$, Vì $y > 0 \Rightarrow$ Xét $z = y^2$. Ta có

$$* \; z = 2a + \cos x + \sin x + 2\sqrt{a^2 + a(\cos x + \sin x) + \cos x \sin x}$$

Đặt $t = \cos x + \sin x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow$

$$z = 2a + t + \sqrt{2}.\sqrt{(t+a)^2 + a^2 - 1}$$

* Nếu $a = 1 \Rightarrow z = 2 + t + \sqrt{2(t+1)^2} \geq 2 + t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min z = 2 + t \text{ khi } t = -1 \\ \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min z = 1 \text{ khi } t = -1 \\ \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \end{cases}$$

Hay $\cos x + \sin x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi\right\}, k \in Z$$

* Nếu $a > 1 \Rightarrow z' = 1 + \dfrac{\sqrt{2}(t+a)}{\sqrt{(t+a)^2 + a^2 - 1}} \Rightarrow$

+ Khi $t + a \geq 1 \Leftrightarrow t \geq -a \Rightarrow z' > 0$

+ Khi $t + a < 0 \Leftrightarrow t < -a \Rightarrow$

$$\Rightarrow z' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -a - \sqrt{a^2 - 1} \\ t = -a + \sqrt{a^2 + 1} > -a \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Chú ý là $-a - \sqrt{a^2 - 1} \geq -\sqrt{2} \Leftrightarrow a \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} < \sqrt{2}$

Vậy $1 \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \min z = z\left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right) = a + \sqrt{a^2 + 1} \\ \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \end{cases} \Rightarrow$

ĐS: $1 \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min y = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} \text{ tại } t = \sin x + \cos x = -a-\sqrt{a^2-1} \\ R \end{cases}$$

Bài 389. Hàm số đã cho, với $\forall x \in R$ ta có:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + m \sin x \cos x$$

$$= -\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x + 1$$

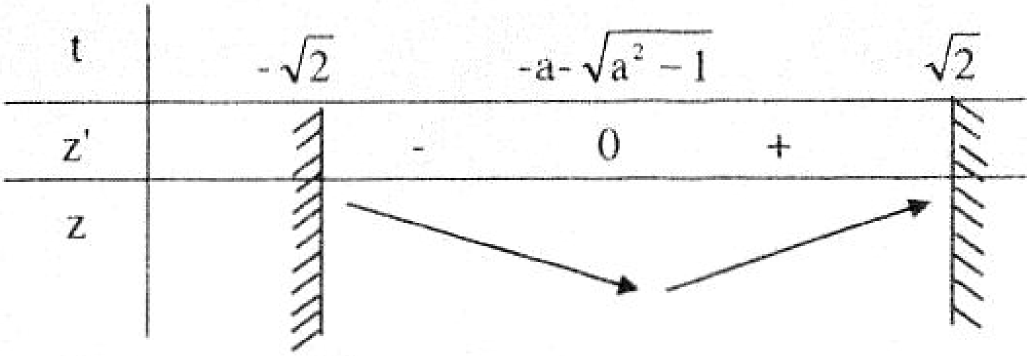
Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow |t| \le 1$

Xét $y = f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{m}{2}t + 1$ trên $[-1;1]$ có cực đại tại

$$t_0 = \frac{m}{2} \Rightarrow f_{max}(t_o) = f\left(\frac{m}{2}\right) = 1 + \frac{m^2}{8}$$

$$f(-1) = \frac{1-m}{2}, f(1) = \frac{1+m}{2} \Rightarrow$$

Ta có bảng biến thiên



$$* \ t_0 \in (-1,1) \Leftrightarrow -1 < \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y = f(t_0) = 1 + \frac{m^2}{8} \\ R \end{cases} \text{ và}$$

$$\begin{cases} \min y = \begin{cases} \frac{1+m}{2} \text{ nếu } -2 < m \le 0 \\ \frac{1-m}{2} \text{ nếu } 0 < m < 2 \end{cases} \\ R \end{cases}$$

* $t_0 \notin (-1; 1) \Leftrightarrow |m| \geq 2 \Rightarrow$

$$\max\limits_{R} y = \max\{f(-1), f(1)\} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{1-m}{2} \text{ nếu } m \leq -2\\ \dfrac{1+m}{2} \text{ nếu } m \geq 2\end{array}\right.$$

$$\min\limits_{R} y = \min\{f(-1), f(1)\} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{1+m}{2} \text{ nếu } m \leq -2\\ \dfrac{1-m}{2} \text{ nếu } m \geq 2\end{array}\right.$$

Bài 390. Hàm số đã cho

$$y = 2(1 + \sin 2x \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$$

$= 2 + \sin 6x - \sin 2x - \sin 6x . \sin 2x$

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow |t| \leq 1 \Rightarrow y = 4t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 2t + 2$ có

$$y' = 16t^3 - 12t^2 - 6t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right\}$$

Ta có bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		1
y'		-	0	+	0	-	
y	5	↘	1	↗	$\frac{145}{64}$	↘	1

ĐS: Trên R,

* $\max y = 5$ tại $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

* min y = 1 tại $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$$

Bài 391.

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow t \in [0,1]$ và $\forall x \in R$ hàm

$y = \dfrac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$ trở thành

$y = \dfrac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2}$ trên $[0,1] \Leftrightarrow y = 1 + \dfrac{1}{3t^2 - 2t + 2}$ có

y' với $\forall$ t $\in$ [0, 1].

* Dễ thấy trên [0, 1] $\Rightarrow y_1 = 3t^2 - 2t + 2$ có max y_1 =

$= \max\{y_1(0), y_1(1)\} = 3$ và $\min y_1 = y_1\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{3} \Rightarrow$ *ĐS:* trên R

* $\max y = \dfrac{8}{5}$ tại $\sin^2 x = \dfrac{1}{3}$

* $\min y = \dfrac{4}{3}$ tại $\sin^2 x = 1$

Bài 392. Hàm số đã cho

$y = \sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x \cos x$

$= -\dfrac{3}{4}\sin^2 2x + \dfrac{a}{2}\sin 2x + 1 = -\dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{a}{2}t + 1$ với $t = \sin 2x$,

$|t| \leq 1 \Rightarrow y' = -\dfrac{3}{2}t + \dfrac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{a}{3}$

Xét các trường hợp t so với [-1, 1] ⇒ trên R

ĐS: * $a < -3$

$$\Rightarrow \max y = \frac{1}{4} - \frac{a}{2} \text{ tại } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\min y = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} \text{ tại } x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

* $a > 3$

$$\Rightarrow \max y = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} \text{ tại } x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\min y = \frac{1}{4} - \frac{a}{2} \text{ tại } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

* $|a| \le 3 \Rightarrow \max y = \frac{a^2}{12} + 1$ tại $\sin 2x = \frac{a}{3}$

$$\min y = \min\ \{y(-1), y(+1)\} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} + \frac{a}{2} \text{ nếu } -3 \le a \le 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{2} \text{ nếu } 0 < a \le 3 \end{array}\right.$$

Bài 393. Dễ thấy

$P = \text{tg } A \text{ tg } B \text{ tg } C = \text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C \ge 3\sqrt[3]{P}$

Với Δ ABC nhọn ⇒ $P \ge 3\sqrt{3}$ ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} \min P = 3\sqrt{3} \text{ khi và chỉ khi } \Delta ABC \text{ đều} \\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Bài 394. Với $\forall x \in (D) \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$ ta có:

* Hàm đã cho :

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \ge \left(\sqrt{\cos x}\right)^4 + \left(\sqrt{\sin x}\right)^4 = 1$$

(Vì $0 \le \sqrt{\cos x}, \sqrt{\sin x} \le 1) \Rightarrow \begin{cases} \min y = 1 \\ D \end{cases}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \left\{ k2\pi \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, k \in Z$

* Mặt khác theo BĐT B. C. S. thì hàm số đã cho:

$$y = 1.\sqrt{\cos x} + 1.\sqrt{\sin x} \le \sqrt{2\sqrt{2}.\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \le \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\ y = \sqrt{2\sqrt{2}} \\ D \end{cases}$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\cos x}}{1} = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{1} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z \\ \cos x \ge 0, \sin \ge 0 \end{cases}$$

Bài 395. Với $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, ta có

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \text{tg}(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\beta.\text{tg}\,\gamma + \text{tg}\,\gamma.\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow$$

theo BĐT B. C.S ta có biểu thức đã cho:

$$g = 1.\sqrt{1 + \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,\beta} + 1.\sqrt{1 + \text{tg}\,\beta\text{tg}\,\gamma} +$$
$$+ 1.\sqrt{1 + \text{tg}\,\gamma.\text{tg}\,\alpha} \le \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \max g = 2\sqrt{3} \\ \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,\beta} = \sqrt{1 + \text{tg}\,\beta\text{tg}\,\gamma} = \sqrt{1 + \text{tg}\,\gamma.\text{tg}\,\alpha} \\ \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}, 0 < \alpha, \beta, \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$$

ĐS: $\begin{cases} \max g = 2\sqrt{3} \text{ Tại } \alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6} \\ \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Bài 396.

Đặt $a = \sqrt[3]{\sin A}$, $b = \sqrt[3]{\sin B} \Rightarrow a, b > 0$

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \text{ Vì } \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{2}\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq \frac{a+b}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$(a + b)\,(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + b)\,(a -)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Vậy $\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} \leq \sqrt[3]{4(\sin A + \sin B)} =$

$$= \sqrt[3]{8\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = 2\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

Tương tự.... $\Rightarrow$ Biểu thức đã cho

$$M = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max M = 1 \Leftrightarrow \cos\dfrac{A-B}{2} = \cos\dfrac{B-C}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2} = 1 \\ (0, \pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = C$$

ĐS: ΔABC là tam giác đều thì có $\begin{cases}\max M\\(0,\pi)\end{cases}$,

khi đó max M = 1 trên $(0\ ,\ \pi)$

Bài 397.

* Dễ thấy với $\forall x \in R \Rightarrow y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x \le 2 + 1 = 3 \Rightarrow$

$\begin{cases}\max y = 3\\R\end{cases}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\sin^8 x = 1\\\cos^4 2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \pm 1\\\cos 2x = \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

* Mặt khác $(3y) = 3(2\sin^8 x + \cos^4 2x) \ge$

$$\ge (1.\sin^4 x + 1.\sin^4 x + 1.\cos^2 2x)^2 \ge$$

$$\ge \left[\frac{1}{3}(1.\sin^2 x + 1.\sin^2 x + 1\cos 2x)^2\right]^2$$

(theo BĐT B.C.S) $\Rightarrow y \ge \dfrac{1}{27}(2\sin^2 x + \cos 2x)^4$

$$= \frac{1}{27}(2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x)^4$$

$\Rightarrow \begin{cases}\min y = \dfrac{1}{27}\\R\end{cases}$ khi và chỉ khi $\sin^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ĐS: Trên R,

$*\max y = 3$ tại $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$*\min y = \dfrac{1}{27}$ tại $\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 398.

Đặt $t = \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow |t| \le 1$ với $\forall x \in R \Rightarrow$

Hàm số đã cho $y = \cos\dfrac{2x}{1+x^2} + \cos\dfrac{4x}{1+x^2} + 1$ trở thành

$y = \cos t + \cos 2t$ trên $[-1, 1]$

hay $y = 2\cos^2 t + \cos t$ với $|t| \le 1 \Rightarrow$ Khi $|t| \le 1 \Rightarrow 0 < \cos t \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3 \ge 2\cos^2 t + \cos t \ge 2\cos^2(\pm 1) + \cos(\pm 1) = 2\cos^2 1 + \cos 1 \Rightarrow$$

$$* \Rightarrow \begin{cases} \max y = 3 \text{ khi và chỉ khi } t = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ R \end{cases}$$

$$* \quad \begin{cases} \min y = 2\cos^2 1 + \cos 1 \text{ khi và chỉ khi } t = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ R \end{cases}$$

Bài 399. Hàm số đã cho

$y = (\cos x + \sin x)^3 + \dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$ với $\forall x \in R$,

ta có $y = \left[\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]^3 + \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$

$\Rightarrow$ y đạt GTNN khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin^2(2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{4} + m2\pi, m \in Z$$

Khi đó $\begin{cases} \min y = y\left(\dfrac{5\pi}{4} + m2\pi\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^3 + 4 = 4 - 2\sqrt{2} \\ R \end{cases}$

$$ĐS:\ \begin{cases}\min y = 4 - 2\sqrt{2} \text{ tại } x = \dfrac{5\pi}{4} + m2\pi, m \in Z\\ R\end{cases}$$

Bài 400. Hàm đã cho với $\forall x, \alpha \in (D): \cos(\pm\alpha) \neq 0$

Ta có:

$$y = tg^2(x+\alpha) + tg^2(x-\alpha)$$

$$= \frac{\sin^2(x+\alpha)\cos^2(x-\alpha) + \sin^2(x-\alpha)\cos^2(x+\alpha)}{\cos^2(x+\alpha)\cos^2(x-\alpha)}$$

$$= \frac{(\sin 2x + \sin 2\alpha)^2 + (\sin 2x - \sin 2\alpha)^2}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2} = \frac{2(\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha)}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2}$$

* Vậy tử số đạt GTNN khi $\sin 2x = 0$, lúc đó $\cos 2x = \pm 1$

Mẫu số đạt GTLN là $(1+\cos 2\alpha)^2$ nếu $\cos 2x = 1$ với $\cos 2x \geq 0$ hoặc là $(1-\cos 2\alpha)^2$ nếu $\cos 2x = -1$ với $\cos 2\alpha \leq 0$

* Từ đó có: *ĐS:*

$$\bullet\begin{cases}\min y = \dfrac{2\sin^2 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)^2} = 2tg^2\alpha \text{ nếu } \cos 2\alpha \geq 0\\ D\end{cases}$$

$$\bullet\begin{cases}\max y = \dfrac{2\sin^2 2\alpha}{(\cos 2\alpha - 1)^2} = \dfrac{2\sin^2 2\alpha}{(1-\cos 2\alpha)^2} = 2\cot g^2\alpha \text{ nếu } \cos 2\alpha \leq 0\\ D\end{cases}$$

Bài 401.

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow |t| \leq 1 \Rightarrow$ với $\forall x \in R$ ta có hàm đã cho $y = \cos^4 x + \sin^4 x + \sin x \cos x + 1$

trở thành: $y = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 2$ Với $t \in [-1, 1] \Rightarrow$

ĐS: Trên R:

* $\max y = \frac{17}{8}$ tại $x = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z\right\}$

* $\min y = 1$ tại $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$

Bài 402.

Trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2}$ đồng biến,

$$\Rightarrow \max g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$h(x) = \sin^2 x \le 1 \Rightarrow \max(\sin^2 x) = 1$ tại $x = \frac{\pi}{2}$

Vậy *ĐS;* $\begin{cases} \max f(x) = \frac{\pi}{4} + 1 \text{ tại } x = \frac{\pi}{2} \\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Bài 403. Ta có

$P = \cos A + \cos B + \cos C$

$= -2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) + 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} + 1$ đạt GTLN tại

$\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow P \le P\left(\cos\frac{A-B}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} \le \frac{3}{2}$ trên $(0, \pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max P = \dfrac{3}{2} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} \cos^2 \dfrac{A-B}{2} = 1 \\ \sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \end{cases} \\ (0,\pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều

* Vì $\left|\dfrac{A-B}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\dfrac{A-B}{2} < 1$

$\Rightarrow P = 4\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A}{2} + 1 > 1$ với $\forall$ A, B, C $\in (0,\ \pi)$

$\Rightarrow$ không có min P.